

7. 주파수 영역에서의 제어 시스템 설계

7.7 실험 실습: Lab 7

7.7.1 아날로그 다이내믹 시뮬레이터에 대한 진상 제어기

이 실험에서는 그림 7-28과 같은 아날로그 다이내믹 시뮬레이터를 제어하는 진상 제어기를 설계해서 구현해 본다.

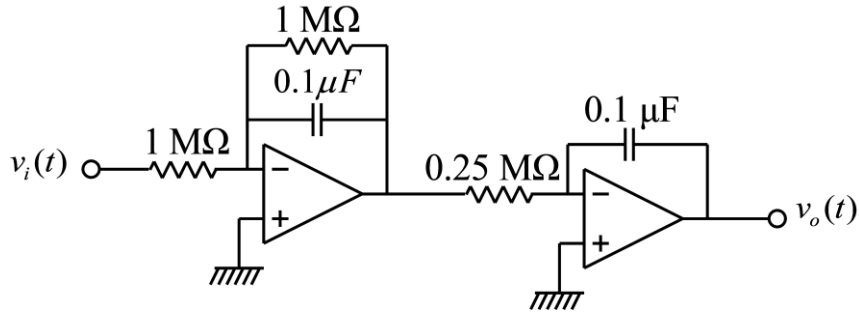


그림 7-28 아날로그 다이내믹 시뮬레이터

그림 7-28의 아날로그 다이내믹 시뮬레이터의 전달 함수는 다음과 같다.

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \left(\frac{-1}{0.1s+1} \right) \left(\frac{-40}{s} \right) = \frac{40}{s(0.1s+1)} \quad (7.78)$$

위의 전달 함수는 예제 7-2의 시스템과 거의 같은 형태의 전달 함수이므로, 예제 7-2의 방법과 비슷하게 진상 제어기를 설계할 수 있다. 진상 제어기의 DC 이득 값(DC gain)은 $K=1$, 요구되는 위상 여유는 55도로 정해서 진상 제어기를 설계하면 진상 제어기의 계수는 $\alpha=0.271$, $T=0.0722$ 이다.

진상 제어기 설계가 완료된 후에는 사다리꼴 규칙을 이용해서 다음 식과 같은 전달 함수를 가지는 디지털 형태의 제어기로 변환할 수 있다.

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \bigg|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}} = K \frac{T \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} + 1}{\alpha T \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} + 1} \quad (7.79)$$

위의 디지털 전달 함수는 다음과 같은 구현식으로 변환할 수 있다.

$$u(k) = \frac{1}{T_s + 2\alpha T} \left[K(T_s + 2T)e(k) + K(T_s - 2T)e(k-1) + (2\alpha T - T_s)u(k-1) \right] \quad (7.80)$$

위의 식에서 $e(k)$ 는 오차 신호, $u(k)$ 는 제어 신호이다.

위의 진상 제어기를 구현하기 위해서 5장 Lab5의 **5.5.1 아날로그 다이내믹 시뮬레이터 대한 PD 제어기**와 동일한 설정을 사용하며 코드는 다음의 코드를 사용한다. 5 장의 5.5.1 절의 코드 5.2, 코드 5.4, 코드 5.8 을 각각 아래의 코드 7.1, 코드 7.2, 코드 7.3 으로 교체한다.

코드 7.1

```
/* USER CODE BEGIN PV */
long interrupt_counter;
long ref,data_counter;
short data[8001];
char data_flag,data_done;
long sampling_frequency;
int y;
float k,ta,tb,delt,error,olderror,control,oldcontrol;
/* USER CODE END PV */
```

코드 7.2

```
/* USER CODE BEGIN 1 */
sampling_frequency= 1000;
k=1;ta=0.0722;tb=0.271*0.0722;delt=1/(float)sampling_frequency;
interrupt_counter=0;
data_counter=0;
data_flag=0;
data_done=0;
/* USER CODE END 1 */
```

코드 7.3

```
/* USER CODE BEGIN Callback 0 */
int32_t da_value,ad_value,sum;
if (htim->Instance == TIM10) {
    sum=0;
    for (int i=0; i<20 ; i++) {
        HAL_ADC_Start(&hadc1);
        if (HAL_ADC_PollForConversion(&hadc1, 10000) == HAL_OK) {
            ad_value = HAL_ADC_GetValue(&hadc1);
            sum += ad_value;
        }
    }
    y = sum/20 - 2048;
    interrupt_counter++;
    if (interrupt_counter >= sampling_frequency*4) {
        interrupt_counter=0;
        if (data_flag==1) {
            data_counter=0;
            data_flag=2;
        }
        ref=205;
    }
    if (interrupt_counter >= sampling_frequency*2) {
        ref=0;
    }
}
```

```

    }
    if (data_flag==2) {
        if (data_counter<=sampling_frequency*4) {
            data[data_counter++]= (int16_t)y;
        }
        else {
            data_done=1;
        }
    }
    error=ref-y;
    control=(k*(delt+2*ta)*error+k*(delt-2*ta)*olderror+(2*tb-
delt)*oldcontrol)/(delt+2*tb);
    oldcontrol=control;
    olderror=error;
    if (control > 2047) control = 2047;
    if (control < -2048) control = -2048;
    da_value = control + 2048;
    HAL_DAC_SetValue(&hdac, DAC_CHANNEL_2, DAC_ALIGN_12B_R,
(uint32_t)(da_value));
}
/* USER CODE END Callback 0 */

```

그림 7-29는 진상 제어가 적용된 아날로그 다이내믹 시뮬레이터의 계단 응답을 보여준다.

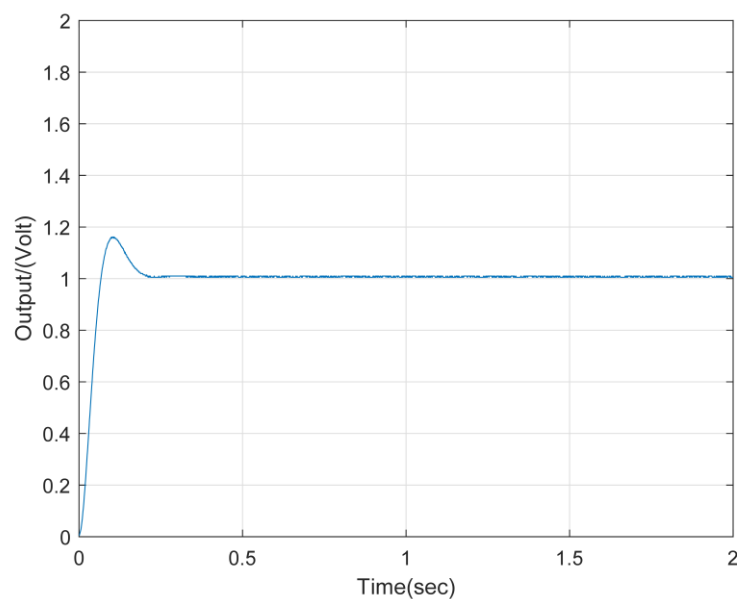


그림 7-29 진상 제어가 적용된 아날로그 다이내믹 시뮬레이터의 계단 응답

실습 연습문제 7.1

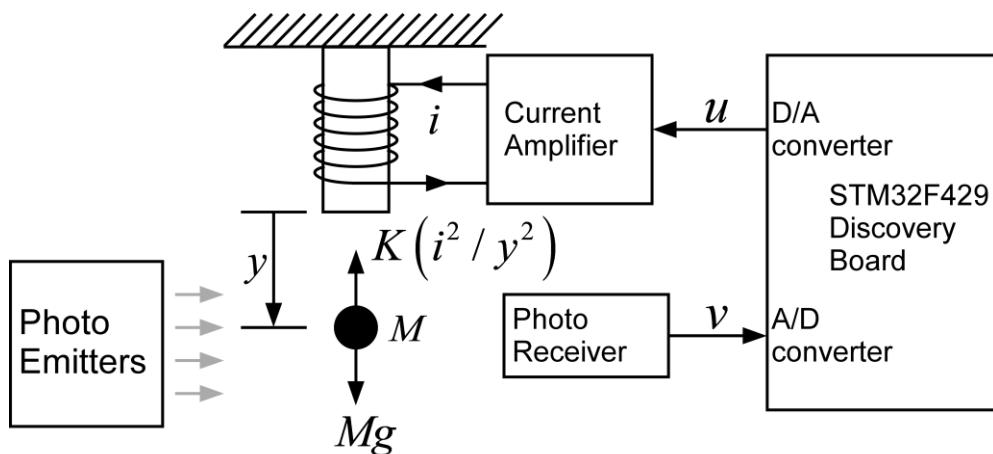
앞의 5장에서 PD 제어를 적용한 DC 모터에 대해서 진상 제어를 설계하고 구현해 본다. 진상 제어기의 DC 이득 값(DC gain)은 $K = 5$, 요구되는 위상 여유는 50도로 한다.

7.7.2 자기 부상 장치에 대한 진상 제어기

이 실험에서는 자기 부상 장치에 대해서 진상 제어기를 설계하고 구현하는 실험을 진행한다. 자기 부상 장치는 여러 가지 종류의 제품이 있으며, 이 실험에서는 Feedback Instruments에서 제작한 자기 부상 장치를 이용한다(Model Number 33-210). 그림 7-30은 이 실험에서 사용한 자기 부상 장치의 모양과 구성도를 보여준다. 이 실험에서 사용한 자기 부상 장치와 동일한 제품이 아닌 경우에도 대부분의 자기 부상 장치는 구성이 비슷하므로 이 절의 실험 방법을 적용할 수 있다. 또한 자기 부상 장치를 직접 제작해서 실험하는 것도 가능하다.



(a)



(b)

그림 7-30 자기 부상 장치 (a) 자기 부상 장치의 모양 (b) 구성도

자기 부상 장치는 전자석에 전류를 흘려 주어 쇠구슬을 공간에 띄우는 실험 장치이다. 이 시스템의 입력은 전자석에 흘려 주는 전류 i 이며, 출력은 전자석으로부터 쇠구슬까지의 거

리 y 이다. 전자석이 쇠구슬을 당기는 힘은 전류의 제곱에 비례하고 거리의 제곱에 반비례한다. 또한 쇠구슬에는 중력에 의한 힘이 작용하므로, 뉴턴의 운동 법칙을 적용하면 다음과 같은 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$Mg - K \frac{i^2}{y^2} = M \frac{d^2y}{dt^2} \quad (7.81)$$

위의 식에서 M 은 쇠구슬의 질량이며, g 는 중력 가속도, 그리고 K 는 비례 상수이다. 이 실험에서 사용하는 장치에서 전자석 코일에 흐르는 전류 i 와 입력 전압 u 의 관계는 다음과 같다.

$$i = 0.15u + I_0 \quad (7.82)$$

쇠구슬이 $y = Y_0$ 의 위치에서 평형 상태에 있다고 가정하고, 이때 흐르는 전류는 $i = I_0$ 라고 가정한다. 쇠구슬의 위치는 적외선 발광 장치와 광센서에 의해서 측정한다. 위치 센서는 전자석과 쇠구슬 사이의 거리에 비례하는 전압을 출력하며, 전압 v 의 식은 다음과 같다. 아래의 식에서 γ 는 비례 상수이다.

$$v = \gamma(y - Y_0) \quad (7.83)$$

미분 방정식을 상태 변수 방정식으로 변환하기 위해서 상태 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} x_1 &= v \\ x_2 &= \dot{v} = \gamma \dot{y} \end{aligned} \quad (7.84)$$

정의된 상태 변수를 이용하면 상태 변수 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \gamma g - \frac{\gamma k}{M} \frac{(0.15u + I_0)^2}{(x_1 / \gamma + Y_0)^2} \end{bmatrix} \quad (7.85)$$

위의 상태 변수 방정식은 비선형 방정식이므로 3.7절에서 설명한 선형화 방법을 이용해서 선형 상태 변수 방정식을 구한다. 선형화를 위해서는 선형화의 중심점이 필요하다. 선형화의 중심점은 평형 상태의 위치 $y = Y_0$ 라고 정하며, 평형 상태에서 전류는 $i = I_0$ 라고 정한다. 평형 상태에서 쇠구슬은 정지 상태이므로 $\dot{x}_2 = 0$ 의 조건에서 다음의 관계 식을 얻을 수 있다.

$$K = \frac{MgY_0^2}{I_0^2} \quad (7.86)$$

따라서 평형 상태에서 상태 변수와 입력의 값은 다음과 같다.

$$x_1 = 0, x_2 = 0, u = 0 \quad (7.87)$$

위의 값들을 이용하면 근사화를 위한 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=0, x_2=0, u=0} &= 0, \\
 \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_1=0, x_2=0, u=0} &= 1, \\
 \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_1=0, x_2=0, u=0} &= \frac{2K}{M} \frac{(0.15u + I_0)^2}{(x_1 / \gamma + Y_0)^3} \bigg|_{x_1=0, x_2=0, u=0} = \frac{2g}{Y_0}, \\
 \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_1=0, x_2=0, u=0} &= 0
 \end{aligned} \tag{7.88}$$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{x_1=0, x_2=0, u=0} &= 0, \\
 \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{x_1=0, x_2=0, u=0} &= -\frac{0.3\gamma K}{M} \frac{(0.15u + I_0)}{(x_1 / \gamma + Y_0)^2} \bigg|_{x_1=0, x_2=0, u=0} = -\frac{0.3\gamma g}{I_0}
 \end{aligned} \tag{7.89}$$

위의 결과에서 다음과 같은 선형 상태 변수 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{Y_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{0.3\gamma g}{I_0} \end{bmatrix} \Delta u \tag{7.90}$$

위의 상태 변수 방정식은 시불변 선형 방정식이므로 다음과 같이 라플라스 변환을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 s\Delta X_1(s) &= \Delta X_2(s) \\
 s\Delta X_2(s) &= \frac{2g}{Y_0} \Delta X_1(s) - \frac{0.3\gamma g}{I_0} \Delta U(s)
 \end{aligned} \tag{7.91}$$

위의 라플라스 변환식에서 다음과 같은 전달 함수를 구할 수 있다.

$$\frac{\Delta X_1(s)}{\Delta U(s)} = -\frac{0.3\gamma g}{I_0} \frac{1}{s^2 - (2g/Y_0)} \tag{7.92}$$

이 실험에 사용된 자기 부상 장치의 각 상수들의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \gamma &= 333.3 \text{ (V / m)} \\
 g &= 9.8 \text{ (m / sec}^2\text{)} \\
 I_0 &= 0.817 \text{ (A)} \\
 X_0 &= 0.023 \text{ (m)}
 \end{aligned}
 \tag{7.93}$$

위의 수치를 대입하면 다음과 같은 전달 함수를 얻을 수 있다.

$$G(s) = -\frac{1200}{s^2 - 852} \tag{7.94}$$

위의 전달 함수는 우평면에 한 개의 실수근을 가지므로 불안정한 시스템이다. 이는 실제 시스템에서 제어가 적절하게 되지 않을 경우 쇠구슬은 밑으로 떨어진다는 사실에서 이해할 수 있다. 또한 이 전달 함수에는 음(-)의 부호가 붙어있다. 제어 신호가 증가하면 전자석의 전류가 증가하므로 쇠구슬을 당기게 되어 전자석과 쇠구슬 사이의 간격이 줄어든다. 제어 신호의 증가에 대해서 출력이 감소하므로 전달 함수에 음(-)의 부호가 붙은 사실과 일치한다. 일반적으로 피드백 제어 시스템을 구성할 때 시스템을 안정화 하기 위해서 네거티브 피드백으로 구성하므로 출력 값에 음의 부호를 붙여서 제어 신호를 구성한다. 그림 7-31 은 선형화된 자기 부상 장치에 진상 제어기를 적용한 블록 선도를 보여준다. 이 그림에서 출력 신호에 붙은 음(-)의 부호는 원래 전달 함수에 붙어 있던 음(-)의 부호이므로, 제어 신호의 계산에는 네거티브 피드백으로 구성하기 위한 음(-)의 부호를 붙일 필요가 없다.

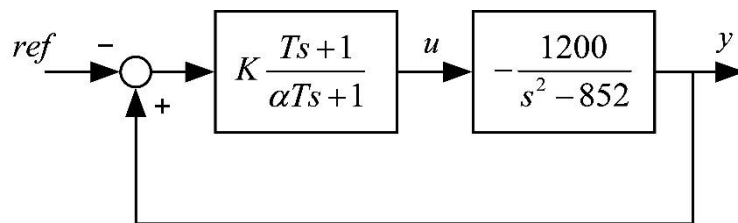


그림 7-31 선형화된 자기 부상 장치에 대한 지상 제어기 적용

선형화된 자기 부상 장치에 대해서 위상 여유가 70 도인 진상 제어기를 설계한다. 아래는 진상 제어기 설계를 위한 MATLAB 코드이다.

코드 7.4

```

clf;format shortg;
k=1;
N=1001;w=logspace(-1,4,N);
phimax=70;alpha=(1-sin(pi*phimax/180))/(1+sin(pi*phimax/180))
0.5*20*log10(1/alpha)

wmax=112;T=1/(wmax*sqrt(alpha))
sys(1)=tf(2*[1200],[1 0 -852]);
sys(2)=tf(2*1200*[T 1],conv([alpha*T 1],[1 0 -852]));

```

```

[mag,phase]=bode(sys(k),w);
for i=1:N
    mag_bode(i)=20*log10(mag(i));
    phase_bode(i)=phase(i);
end
[w' mag_bode' phase_bode']
figure(1)
subplot(2,1,1)
semilogx(w, mag_bode,'-b');
axis([.1 10000 -60 20])
set(gca,'GridLineStyle','-','FontName','times','FontSize',12)
set(gca,'ytick',[-60 -40 -20 0 20 40 60])
xlabel('{\omega} (rad/sec)');
ylabel('Magnitude (dB)')
grid on;
hold on
subplot(2,1,2)
semilogx(w, phase_bode,'-b');
axis([.1 10000 -180 -90])
set(gca,'GridLineStyle','-','FontName','times','FontSize',12)
set(gca,'ytick',[-180 -150 -120 -90])
xlabel('{\omega} (rad/sec)');
ylabel('Phase (degree)')
grid on;
hold off

[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(sys(k))

```

진상 제어기의 앞에 붙은 상수 이득 값 K 는 2 로 정한다. 적절한 상수 이득 값을 찾기 위해서는 약간의 시행 착오의 과정이 필요할 수 있다. 이 값이 지나치게 크면 제어 신호가 포화될 수 있고, 지나치게 작으면 쇠구슬을 공중에 띄우기에 힘이 부족할 수 있다. 위의 MATLAB 프로그램에서 $k=1$ (소문자 k)로 설정하고 실행하면 진상 제어기를 적용하기 전의 위상 여유 값과 주파수 응답 크기를 dB 값으로 프린트한다. 프린트된 값의 각 줄의 첫째 값은 주파수(rad/sec) 값이며 둘째 값은 크기의 dB 값이다. 위의 코드에서 $\text{phimax}=70$ 으로 설정하면 α 값은 0.031 이며, $0.5 \cdot 20 \cdot \log_{10}(1/\alpha)$ 는 15dB 이다. 프린트된 주파수와 dB 값에서 -15dB 의 주파수는 112 (rad/sec)임을 알 수 있다. 다음으로 $k=2$ (소문자 k)로 변경하고 $w_{\max}=112$ 로 설정하고 MATLAB 코드를 실행하면 다음과 같이 진상 제어기 계수를 결정할 수 있으며 위상 여유 70 도가 달성된 것을 확인할 수 있다.

$$T = 0.05, \alpha = 0.031 \quad (7.95)$$

따라서 진상 제어기는 다음과 같다.

$$D(s) = 2 \frac{0.05s+1}{0.031 \times 0.05s+1} = 2 \frac{0.05s+1}{0.00155s+1} \quad (7.96)$$

위의 진상 제어를 구현하기 위해서 5장 Lab5의 **5.5.1 아날로그 다이내믹 시뮬레이터** 대한 **PD 제어기**와 동일한 설정을 사용하며 코드는 다음의 코드를 사용한다. 5 장의 5.5.1 절의 코드 5.2, 코드 5.4, 코드 5.8 을 각각 아래의 코드 7.5, 코드 7.6, 코드 7.7 로 교체한다.

코드 7.5

```
/* USER CODE BEGIN PV */
long interrupt_counter;
long ref,data_counter;
short data[8001];
char data_flag,data_done;
long sampling_frequency;
int y;
float k,ta,tb,delt,error,olderror,control,oldcontrol;
/* USER CODE END PV */
```

코드 7.6

```
/* USER CODE BEGIN 1 */
sampling_frequency= 1000;
k=2;ta=0.05;tb=0.00155;delt=1/(float)sampling_frequency;
interrupt_counter=0;
data_counter=0;
data_flag=0;
data_done=0;
/* USER CODE END 1 */
```

코드 7.7

```
/* USER CODE BEGIN Callback 0 */
int32_t da_value,ad_value,sum;
if (htim->Instance == TIM10) {
    sum=0;
    for (int i=0; i<20 ; i++) {
        HAL_ADC_Start(&hadc1);
        if (HAL_ADC_PollForConversion(&hadc1, 10000) == HAL_OK) {
            ad_value = HAL_ADC_GetValue(&hadc1);
            sum += ad_value;
        }
    }
    y = sum/20 - 2048;
    interrupt_counter++;
    if (interrupt_counter >= sampling_frequency*4) {
        interrupt_counter=0;
        if (data_flag==1) {
            data_counter=0;
            data_flag=2;
        }
        ref=-102;
    }
    if (interrupt_counter >= sampling_frequency*2) {
```

```

        ref=-205;
    }
    if (data_flag==2) {
        if (data_counter<=sampling_frequency*4) {
            data[data_counter++]= (int16_t)y;
        }
        else {
            data_done=1;
        }
    }
    error=-ref+y;
    control=(k*(delt+2*ta)*error+k*(delt-2*ta)*olderror+(2*tb-
delt)*oldcontrol)/(delt+2*tb);
    oldcontrol=control;
    olderror=error;
    if (control > 2047) control = 2047;
    if (control < -2048) control = -2048;
    da_value = control + 2048;
    HAL_DAC_SetValue(&hdac, DAC_CHANNEL_2, DAC_ALIGN_12B_R,
(uint32_t)(da_value));
}
/* USER CODE END Callback 0 */

```

그림 7-32 는 진상 제어가 적용된 자기 부상 장치의 계단 응답을 보여준다. 높은 크기의 위상 여유를 가지는 진상 제어가 적용되었으므로 오버슈트가 거의 없는 것을 볼 수 있다.

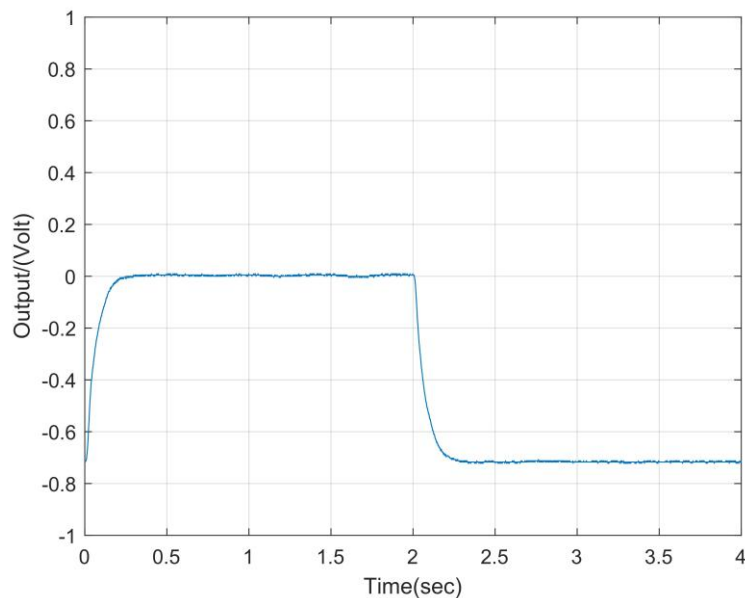


그림 7-32 제어기 (7.96)에 대한 계단 응답

진상 제어기의 계수 변화가 응답에 어떤 영향을 미치는지 보기 위해서 진상 제어기의 미분항 계수를 0.05 에서 0.02 로 변경한 다음의 진상 제어기를 적용해 본다.

$$D(s) = 2 \frac{0.02s + 1}{0.00155s + 1} \quad (7.97)$$

그림 7-33 은 위의 진상 제어기가 적용된 응답을 보여주며, 예상한 대로 오버슛이 증가한 것을 볼 수 있다.

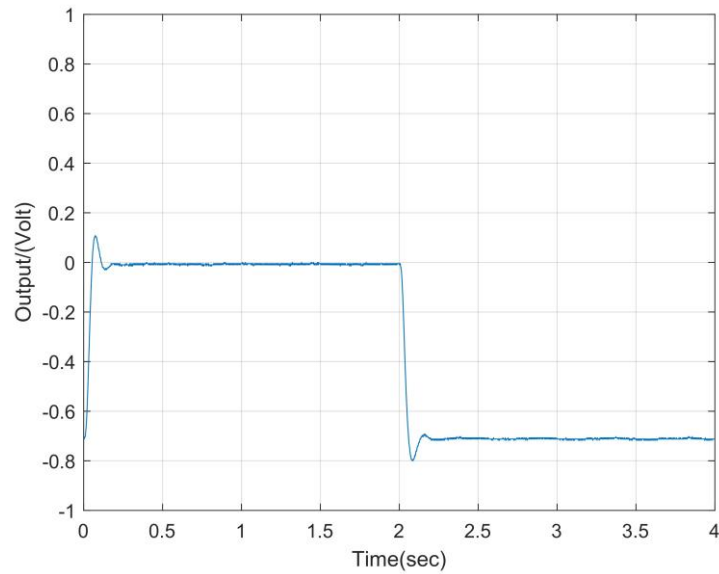


그림 7-33 제어기 (7.97)에 대한 계단 응답

비교를 위해서 진상 제어기의 미분 항 계수를 0.01 로 감소한 다음의 진상 제어기를 적용해 본다.

$$D(s) = 2 \frac{0.01s + 1}{0.00155s + 1} \quad (7.98)$$

그림 7-34는 위의 진상 제어기가 적용된 응답을 보여주며, 앞의 응답과 비교해서 오버슛과 오실레이션이 커진 것을 볼 수 있다.

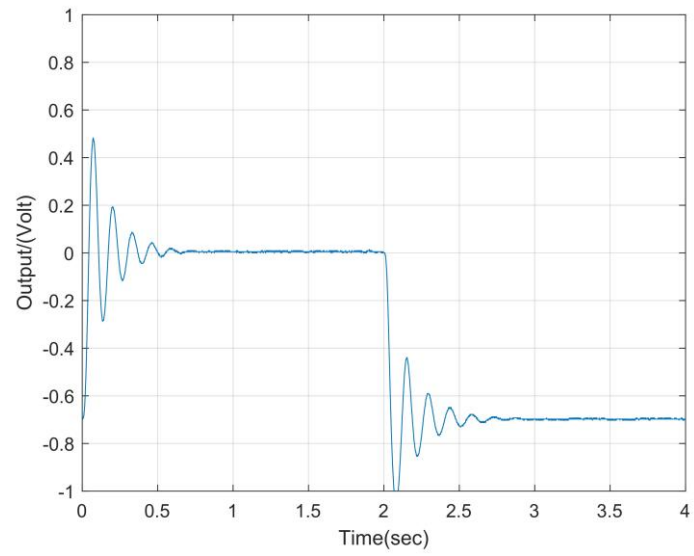


그림 7-34 제어기 (7.98)에 대한 계단 응답

실습 연습문제 7.2

자기 부상 장치의 선형화된 모델을 이용해서 진상 제어기 (7.96), (7.97), (7.98)을 적용한 MATLAB 시뮬레이션을 실행하고 실험 결과와 비교해 본다.