Laplace Transform

2.4 라플라스 변환

- 간단한 제어 시스템은 미분 방정식만으로 해석과 설계가 가능할 수 있음
- 대부분의 제어 시스템은 여러 가지 형태의 블록이 서로 연결되어 구성되어 있으며, 이러한 복잡한 시스템을 미분 방정식을 이용하여 해석하는 것은 매우 복잡함
- 해석을 좀더 쉽게 학기 위해서 수학적 도구를 도입
- 제어 시스템에서 가장 많이 사용되는 수학적 도구로 라플라스 변환(Laplace Transform)이 있음

라플라스 변환의 정의

- 라플라스 변환의 정의

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

- 무한 적분이 수렴하기 위한 조건

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)e^{-\sigma t} \right| dt < \infty$$

- 라플라스 변환을 하면 함수의 변수가 t 에서 s 로 바뀜

단방향 라플라스 변환

- one-sided Laplace transform

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- 회로 이론에서 사용되는 모든 함수는 t<0 의 범위에서는 함수 값이 0 이라고 가정할 수 있음. 단방향 라플라스 변환만을 사용

예제 2-5

- 단위 계단(unit-step) 함수

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

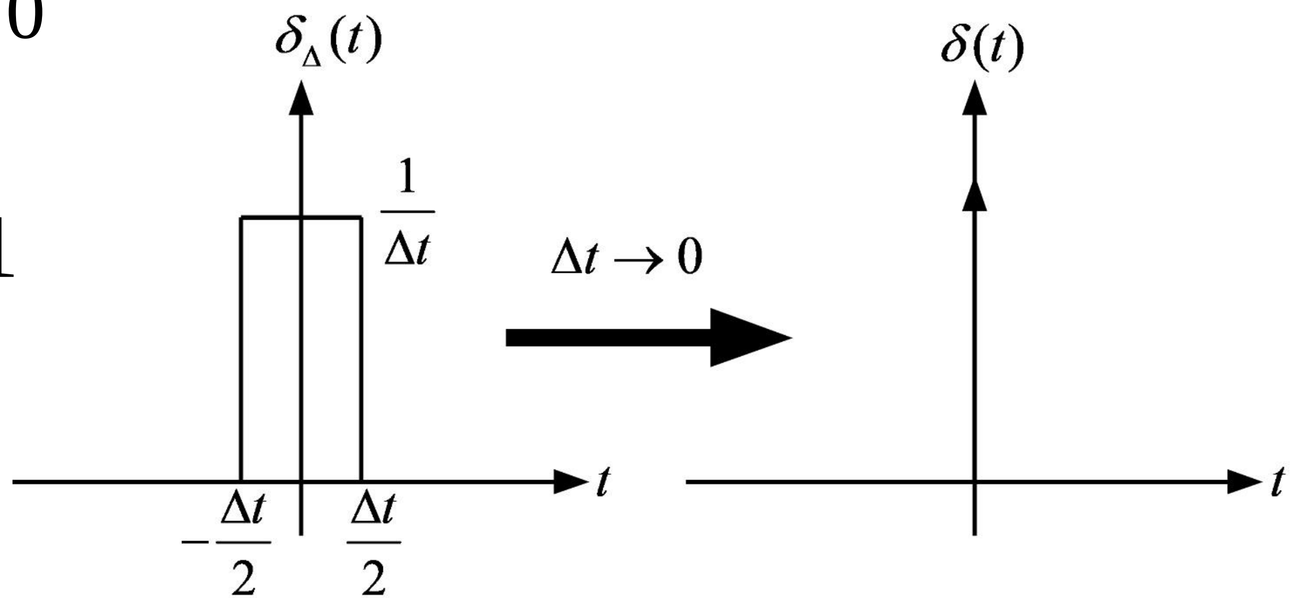
$$\mathcal{L}\left[u_s(t)\right] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

예제 2-6

▪ 임펄스(impulse) 함수

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$



$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) \cdot 1dt = 1$$

예제 2-7

■ 지수 함수

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \int_{0^-}^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\right] = \frac{1}{s+2}$$

예제 2-8

$$\mathcal{L}[t] = \int_{0^-}^{\infty} te^{-st}dt = -\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_{t=0^-}^{t=\infty} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_{t=0^-}^{t=\infty} = \frac{1}{s^2}$$

- **부분 적분:** $\int_a^b f'(t)\cdot g(t)dt = \left(f(t)\cdot g(t)\right)\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)\cdot g'(t)dt$

예제 2-9

- Cosine 함수의 라플라스 변환

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t, \quad e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{j\omega t}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-j\omega t}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\cos 200\pi t\right] = \frac{s}{s^2 + (200\pi)^2}$$

라플라스 변환의 특징

- **선형성(Linearity)**

$$\mathcal{L}\left[kf(t)\right] = k\mathcal{L}\left[f(t)\right] = kF(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) + f_2(t)\right] = \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + \mathcal{L}\left[f_2(t)\right] = F_1(s) + F_2(s)$$

- **주파수 영역에서의 이동(Shift in the frequency domain)**

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s+a)$$

- **예제 2-10**

$$\mathcal{L}\left[\cos(200\pi t)\right] = \frac{s}{s^2 + (200\pi)^2}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos(200\pi t)\right] = \frac{s+2}{(s+2)^2 + (200\pi)^2}$$

라플라스 변환의 특징

▪ 시간 영역에서의 이동(Shift in the time domain)

$$\mathcal{L}\left[f(t-T) \right] = e^{-sT}F(s)$$

라플라스 변환의 특징

▪ 미분(Differentiation)

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \cdot\ \cdot\ \cdot - f^{(n-1)}(0)$$

라플라스 변환의 특징

- **적분(Integration)**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

라플라스 변환의 특징

- **초기값 정리(Initial-value theorem)**

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

라플라스 변환의 특징

▪ 최종값 정리(Final-value theorem)

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

▪ 예제 2-11

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) = \frac{1}{s(s+2)}$$

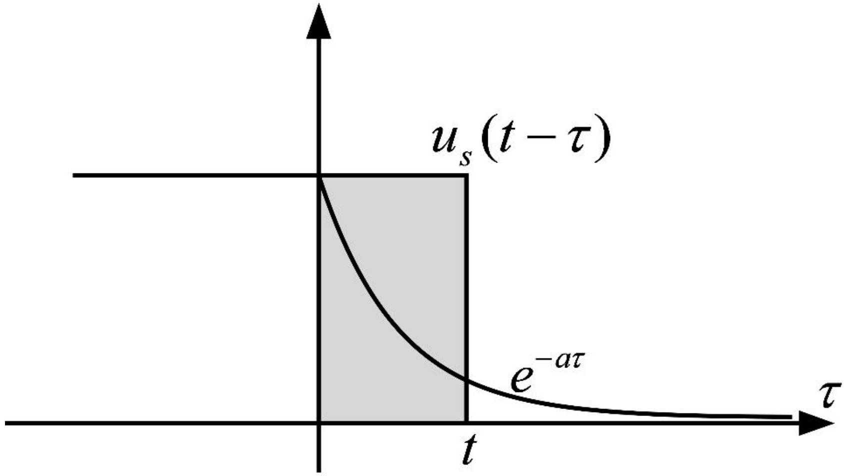
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}$$

라플라스 변환의 특징

▪ 컨벌루션(Convolution)의 정의

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

▪ 컨벌루션의 예



$$f_1(t) = e^{-at}, \quad f_2(t) = u_s(t)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t e^{-a\tau} u_s(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = -\frac{1}{a} e^{-at} + \frac{1}{a}$$

CONTROL SYSTEMS

▪ 컨벌루션(Convolution)과 라플라스 변환

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t) \right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right]$$

$$= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] = F_1(s) F_2(s)$$

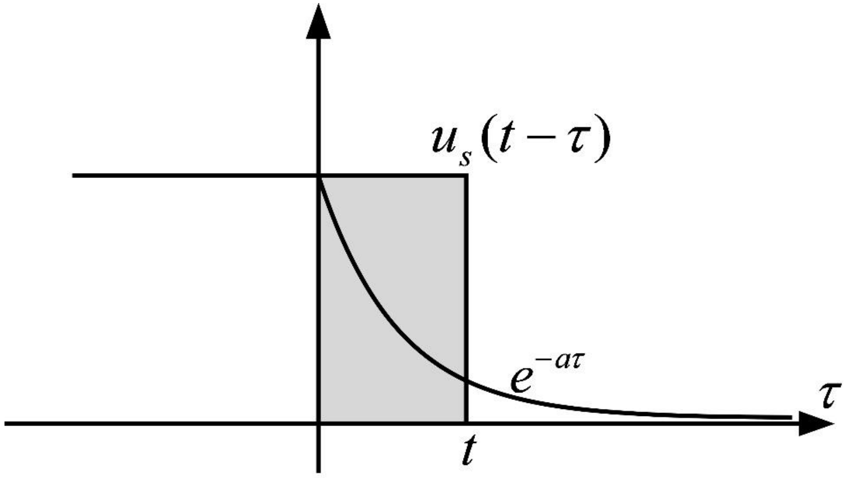
$$\mathcal{L}\left[f_1(t) f_2(t) \right] = F_1(s) * F_2(s)$$

예제 2-12

$$f_1(t) = e^{-at}, \quad f_2(t) = u_s(t)$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+a}, \quad \mathcal{L}[u_s(t)] = \frac{1}{s}$$

$$f_1(t) * f_2(t) = -\frac{1}{a}e^{-at} + \frac{1}{a}$$



$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}\left[-\frac{1}{a}e^{-at} + \frac{1}{a}\right] = \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{s+a} + \frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{s(s+a)} = \mathcal{L}[f_1(t)] \cdot \mathcal{L}[f_2(t)]$$

역라플라스 변환(Inverse Laplace transform)

- 라플라스 변환으로 주어진 어떤 함수에 대해서 원래의 함수를 찾아야 하는 경우에 필요함

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

- 대부분의 경우 부분 분수 분해를 이용해서 구함

CONTROL SYSTEMS

역라플라스 변환(Inverse Laplace transform)

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 6}$$

$$G(s) = \frac{2}{(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3}$$

$$G(s) = \frac{2}{(s+2)(s+3)} = \frac{(K_1 + K_2)s + 3K_1 + 2K_2}{(s+2)(s+3)}$$

$$K_1 + K_2 = 0, \; 3K_1 + 2K_2 = 2 \qquad K_1 = 2, \; K_2 = -2$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+3}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+3}\right] = 2e^{-2t} - 2e^{-3t}, \; t \geq 0$$

부분 분수 분해

▪ 분모가 단근(simple root) 만을 갖는 경우

$$G(s)=\frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=\frac{K_1}{s+p_1}+\frac{K_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s+p_n}$$

$$G(s)(s+p_i)=\frac{K_1(s+p_i)}{s+p_1}+\frac{K_2(s+p_i)}{s+p_2}\cdots+K_i+\cdots\frac{K_n(s+p_i)}{s+p_n}$$

$$K_i=G(s)\left(s+p_i\right)\Big|_{s=-p_i}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_1}{s+p_1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_2}{s+p_2}\right]+\cdots+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_n}{s+p_n}\right]$$

$$=K_1e^{-p_1t}+K_2e^{-p_2t}+\cdots+K_ne^{-p_nt}$$

예제 2-13

$$G(s)=\frac{2}{(s+2)(s+3)}=\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s+3}$$

$$K_1=\frac{2}{(s+2)(s+3)}\left(s+2\right)\Bigg|_{s=-2}=2$$

$$K_2=\frac{2}{(s+2)(s+3)}\left(s+3\right)\Bigg|_{s=-3}=-2$$

예제 2-14

$$G(s)=\frac{2}{s^2+2s+5}=\frac{2}{(s+1+j2)(s+1-j2)}=\frac{K_1}{s+1+j2}+\frac{K_2}{s+1-j2}$$

$$K_1=\frac{2}{(s+1+j2)(s+1-j2)}(s+1+j2)\bigg|_{s=-1-j2}=\frac{j}{2}$$

$$K_2=\frac{2}{(s+1+j2)(s+1-j2)}(s+1-j2)\bigg|_{s=-1+j2}=-\frac{j}{2}$$

$$G(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{j}{s+1+j2}+\frac{-j}{s+1-j2}\right)$$

$$g(t)=\frac{1}{2}\left(je^{-(1+j2)t}-je^{-(1-j2)t}\right)=e^{-t}\left[\frac{(e^{j2t}-e^{-j2t})}{2j}\right]=e^{-t}\sin 2t$$

예제 2-14(또 다른 해)

$$G(s)=\frac{2}{s^2+2s+5}=\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$G_1(s)=\frac{2}{s^2+2^2} \qquad g_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right]=\sin 2t$$

- **주파수 영역에서의 이동을 이용:** $\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right]=F(s+a)$

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right]=e^{-t}\sin 2t$$

분모가 중근(multiple roots)을 갖는 경우

$$G(s) = \frac{s^2}{(s+2)^3} = \frac{K_1}{(s+2)^3} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{(s+2)}$$

$$G(s)(s+2)^3\Big|_{s=-2} = \left[K_3(s+2)^2 + K_2(s+2) + K_1\right]\Big|_{s=-2} = K_1 \Rightarrow$$

$$s^2\Big|_{s=-2} = K_1 = 4$$

$$\left.\frac{dG(s)(s+2)^3}{ds}\right|_{s=-2} = \left[2K_3(s+2) + K_2\right]\Big|_{s=-2} = K_2 \Rightarrow$$

$$\left.\frac{d\left(s^2\right)}{ds}\right|_{s=-2} = 2s\Big|_{s=-2} = K_2 = -4$$

분모가 중근(multiple roots)을 갖는 경우

$$\left.\frac{d^2 G(s)(s+2)^3}{ds^2}\right|_{s=-2} = 2K_3 \Rightarrow$$

$$\left.\frac{d^2 \left(s^2\right)}{ds^2}\right|_{s=-2} = 2K_3 = 2$$

$$G(s) = \frac{4}{(s+2)^3} - \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)} \qquad g(t) = e^{-2t}\left(2t^2 - 4t + 1\right)$$

▶ 참고: $\mathcal{L}\left[\left(2t^2 - 4t + 1\right)\right] = \frac{4}{s^3} - \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s}$

분모가 중근(multiple roots)을 갖는 경우

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_{i-1})(s+p_i)^r}$$

$$= \frac{K_1}{s+p_1} + \frac{K_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{K_{i-1}}{s+p_{i-1}}$$

$$+ \frac{K_{i1}}{(s+p_i)^r} + \frac{K_{i2}}{(s+p_i)^{r-1}} + \cdots + \frac{K_{ir}}{(s+p_i)^1}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left. \frac{d^{\,j-1} G(s)(s+p_i)^r}{ds^{\,j-1}} \right|_{s=-p_i}, \; j = 1, 2, \ldots, r$$

■ 예제 2-15

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y=u_s(t) \qquad y(0)=1,\, y^{(1)}(0)=0$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y^{(1)}(0)+5\big(sY(s)-y(0)\big)+6Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$\left(s^2+5s+6\right)Y(s)=\frac{1}{s}+s+5=\frac{s^2+5s+1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{s^2+5s+1}{s\left(s^2+5s+6\right)}=\frac{s^2+5s+1}{s(s+2)(s+3)} \qquad Y(s)=\frac{1/6}{s}+\frac{5/2}{s+2}-\frac{5/3}{s+3}$$

$$y(t)=\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{2}e^{-2t}-\frac{5}{3}e^{-3t}\right)u_s(t)$$

푸리에 시리즈 (Fourier series)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \right) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

푸리에 변환(Fourier transform)

- 푸리에 시리즈:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

- 푸리에 변환: 푸리에 시리즈의 주기를 무한대로

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

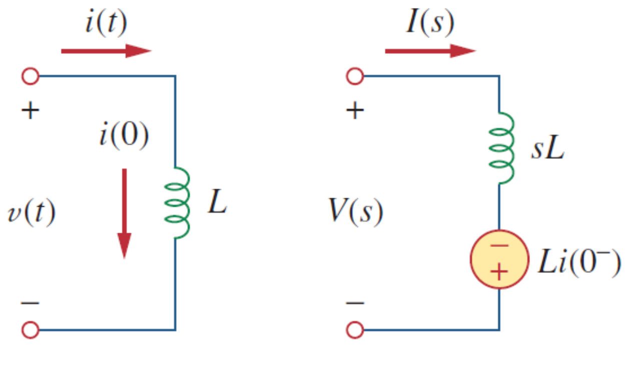
- 라플라스 변환: $F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ $\qquad s=\sigma+j\omega$

라플라스 변환 회로 소자 모델

▪ 저항

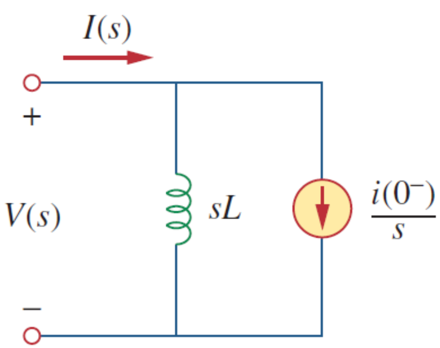
$$v(t) = Ri(t)$$

$$V(s) = RI(s)$$



(a) (b)

▪ 인덕터



(c)

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$V(s) = L\left[sI(s) - i(0^-)\right] = sLI(s) - Li(0^-)$$

$$I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i(0^-)}{s}$$

CONTROL SYSTEMS

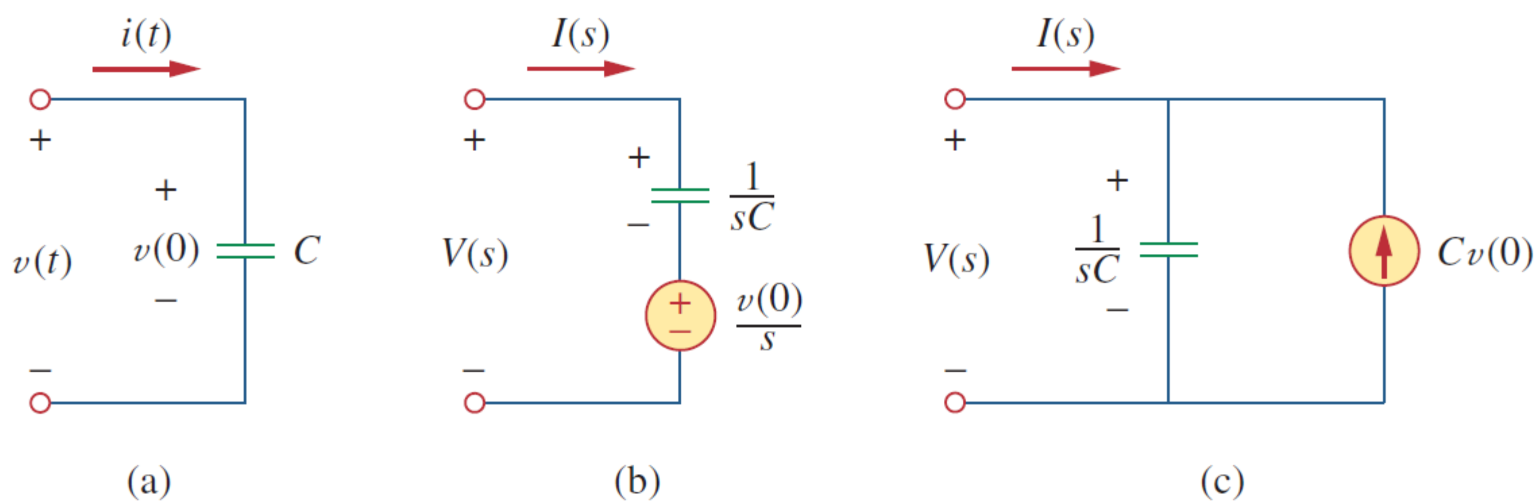
라플라스 변환 회로 소자 모델

- **커패시터**

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$I(s) = C\left[sV(s) - v(0^-)\right] = sCV(s) - Cv(0^-)$$

$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$



CONTROL SYSTEMS

- **초기 조건이 0 이라고 가정**

$$\text{Resistor:} \quad V(s) = RI(s)$$

$$\text{Inductor:} \quad V(s) = sLI(s)$$

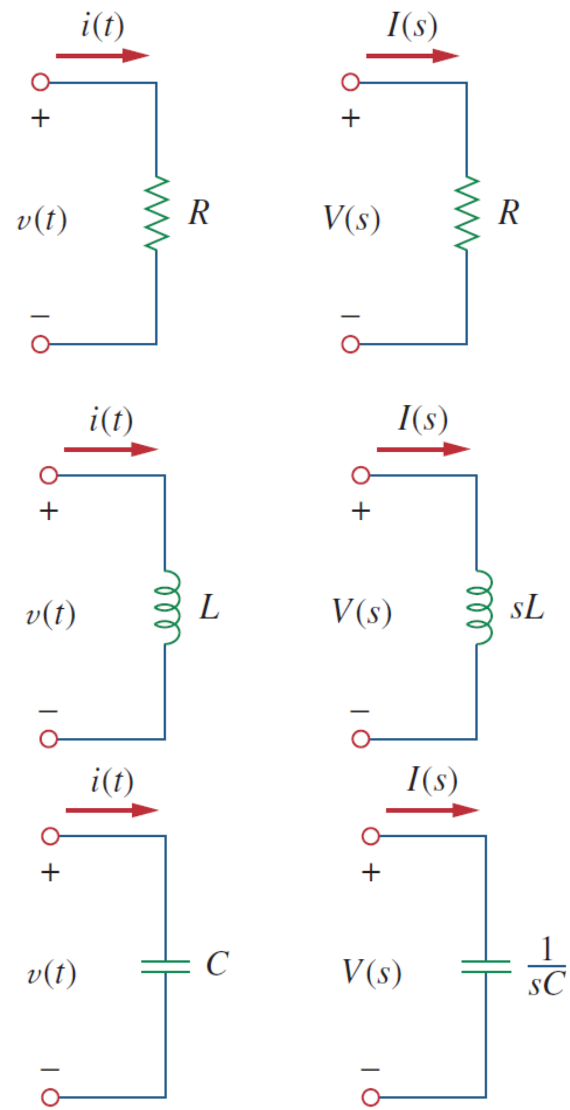
$$\text{Capacitor:} \quad V(s) = \frac{1}{sC}I(s)$$

- **임피던스**

$$\text{Resistor:} \quad Z(s) = R$$

$$\text{Inductor:} \quad Z(s) = sL$$

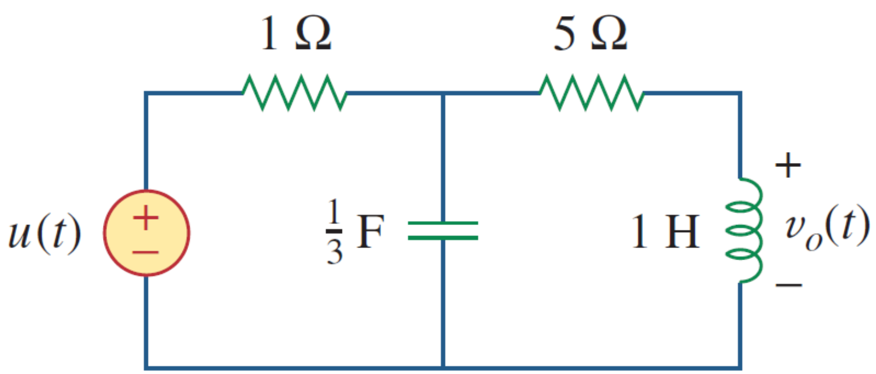
$$\text{Capacitor:} \quad Z(s) = \frac{1}{sC}$$



CONTROL SYSTEMS

예제

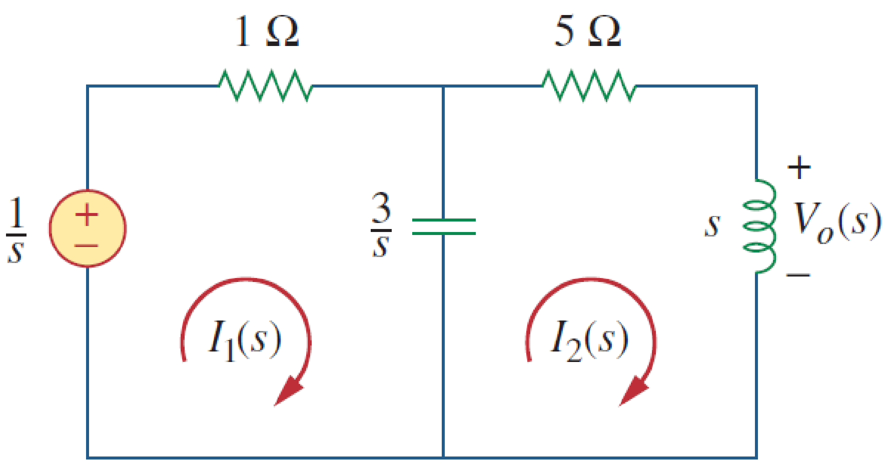
▪ 초기 조건은 0 이라고 가정

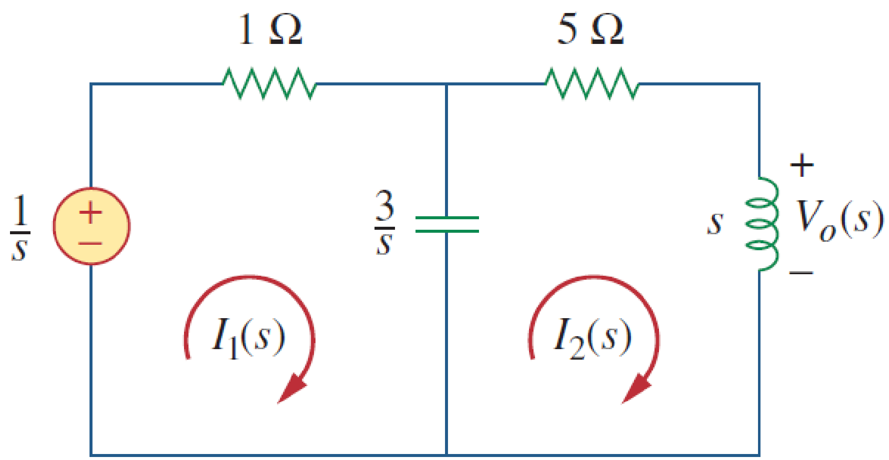


$$u(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s}$$

$$1\ \mathrm{H} \quad \Rightarrow \quad sL = s$$

$$\frac{1}{3}\mathrm{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{sC} = \frac{3}{s}$$





$$\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right)I_1 - \frac{3}{s}I_2$$

$$0 = -\frac{3}{s}I_1 + \left(s + 5 + \frac{3}{s}\right)I_2$$

$$I_2 = \frac{3}{s^3 + 8s^2 + 18s}$$

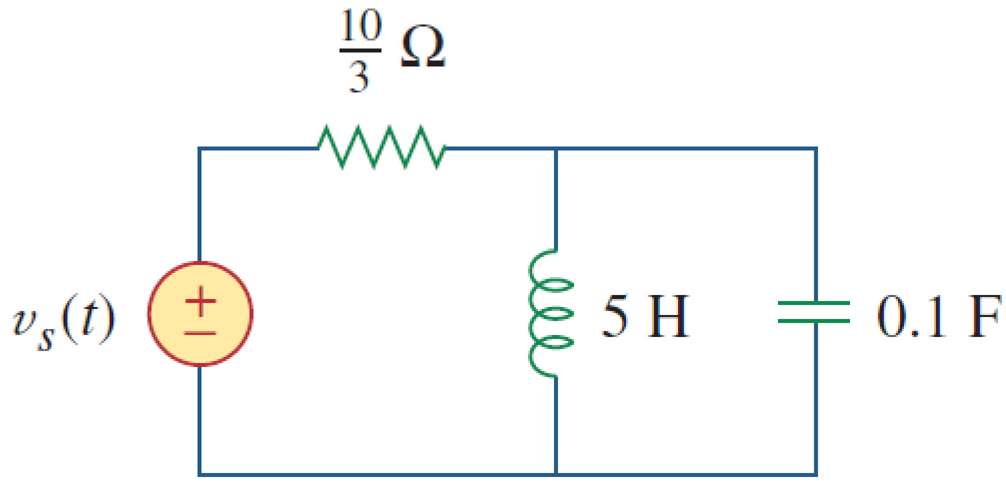
$$V_o(s) = sI_2 = \frac{3}{s^2 + 8s + 18} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s+4)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

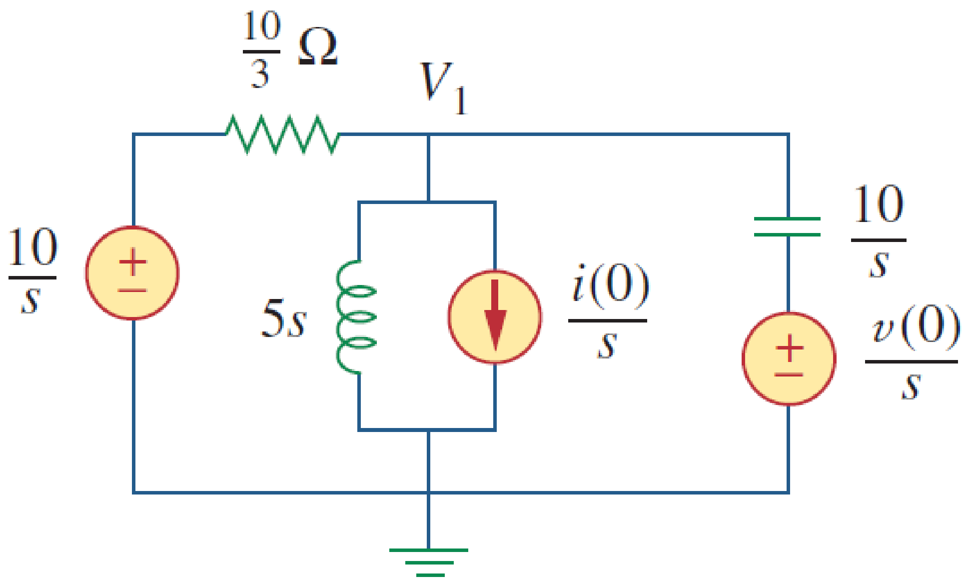
$$v_o(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-4t} \sin \sqrt{2}t \text{ V}, \qquad t \geq 0$$

예제

- **초기 조건:** $i(0) = -1A, v(0) = 5V$

$v_s(t) = 10u(t)$





CONTROL SYSTEMS

$$\frac{V_1 - 10/s}{10/3} + \frac{V_1 - 0}{5s} + \frac{i(0)}{s} + \frac{V_1 - [v(0)/s]}{1/(0.1s)} = 0$$

$$0.1\left(s + 3 + \frac{2}{s}\right)V_1 = \frac{3}{s} + \frac{1}{s} + 0.5$$

$$V_1 = \frac{40 + 5s}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{35}{s + 1} - \frac{30}{s + 2}$$

$$v_1(t) = (35e^{-t} - 30e^{-2t})u(t)\ \mathrm{V}$$

전달 함수

- 전달 함수의 정의: 출력 신호 라플라스 변환과 입력 신호 라플라스 변환의 비. 초기 조건은 0이라고 가정.

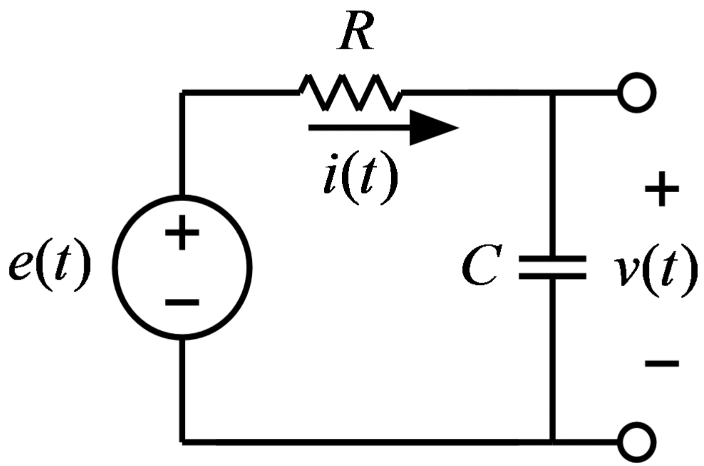
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- 회로 전달 함수의 종류
  - Voltage Gain: 전압/전압
  - Current Gain: 전류/전류
  - Impedance: 전압/전류
  - Admittance: 전류/전압

RC 회로의 전달 함수

$$i(t) = \frac{e(t) - v(t)}{R} = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$RC\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = e(t)$$



- 초기 조건은 0이라고 가정하고 라플라스 변환

$$RCsV(s) + V(s) = (RCs+1)V(s) = E(s)$$

- 전달 함수

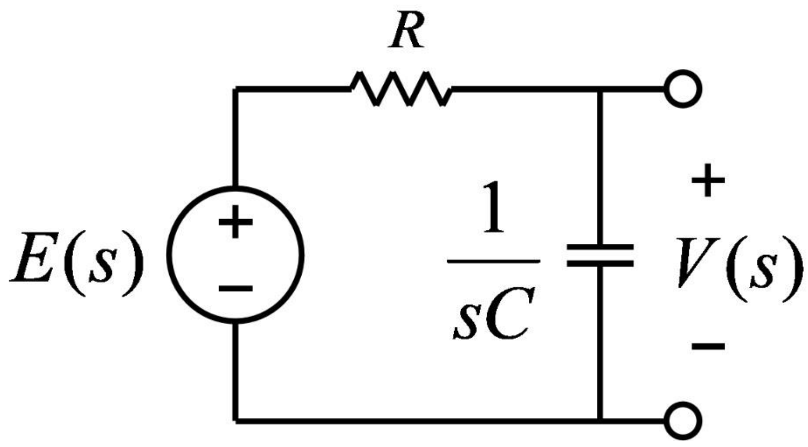
$$G(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

CONTROL SYSTEMS

- **라플라스 변환 회로 모델과 전압 배분 법칙 이용**

$$V(s)=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}E(s)=\frac{1}{RCs+1}E(s)$$

$$G(s)=\frac{V(s)}{E(s)}=\frac{1}{RCs+1}$$



- **네트워크 함수:** $G(j\omega)=\dfrac{V(j\omega)}{E(j\omega)}=\dfrac{1}{j\omega RC+1}$

- **네트워크 함수와 전달 함수**

$$G(j\omega)=G(s)\Big|_{s=j\omega}$$