회로 이론의 기초 수학

2.1 복소수

- 복소수: 실수와 허수로 이루어진 수
- 허수: 제곱을 하면 0 보다 작은 수가 되는 수

$$j = \sqrt{-1} \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$(j2)^2 = \left(2\sqrt{-1}\right)^2 = -4$$

$$1 + j2 = 1 + 2\sqrt{-1}$$

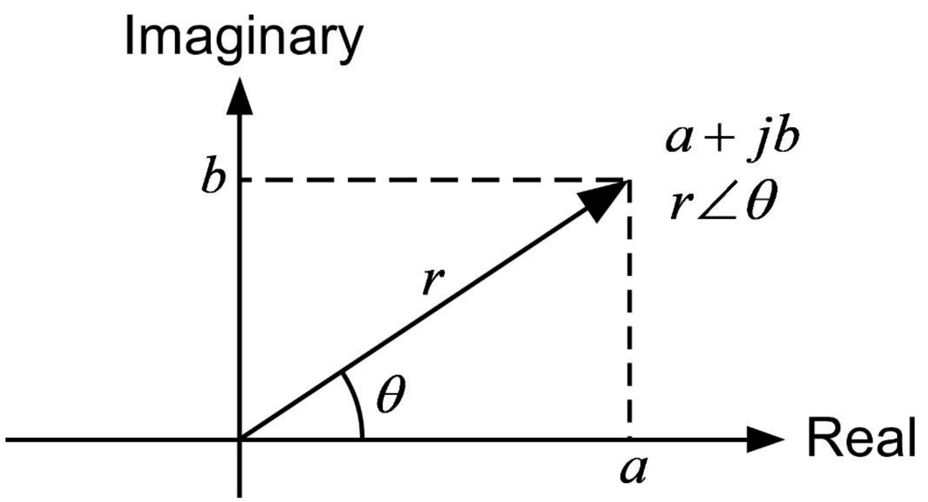
$$s = a + jb = a + b\sqrt{-1}$$

- 실수부: $a = \mathrm{Re}\{s\}$
- 허수부: $b = \mathrm{Im}\{s\}$

직교 좌표와 극 좌표

$$r\angle\theta = (r\cos\theta) + j(r\sin\theta) = a + jb$$

$$a = r\cos\theta, b = r\sin\theta$$



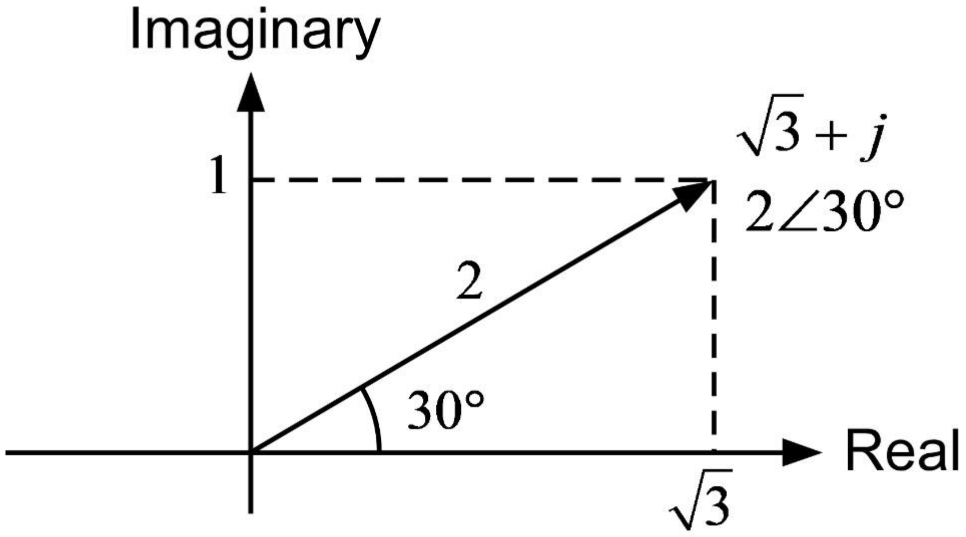
▪ **오일러(Euler)의 관계식:** $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$$r\angle\theta = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta}$$

CONTROL SYSTEMS

$$2\angle 30^\circ = \left(2\cos 30^\circ\right) + j\left(2\sin 30^\circ\right)$$

$$= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + j2\times\frac{1}{2} = \sqrt{3} + j$$

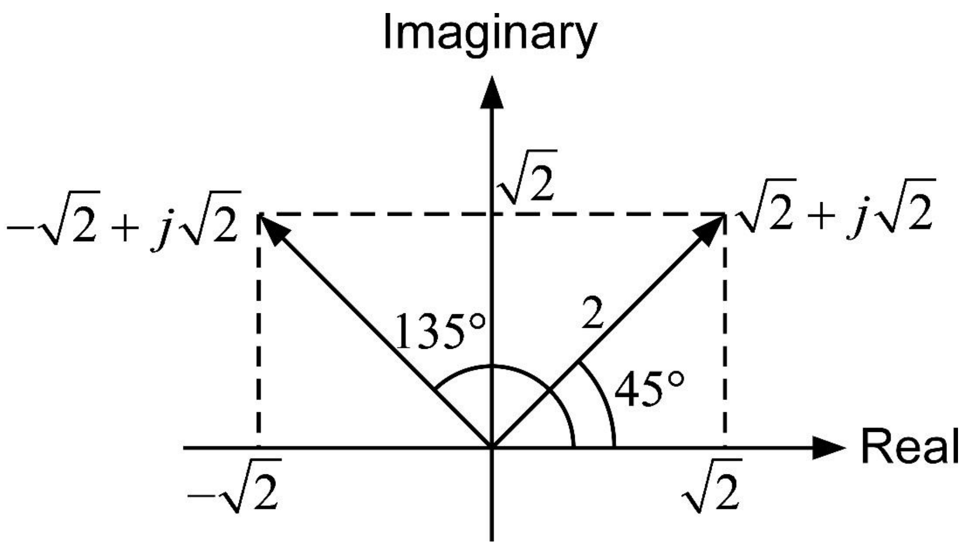


예제 2-1

- 극 좌표(각도)에서 직교 좌표로

$$2\angle 45^\circ = 2\cos(45^\circ) + j2\sin(45^\circ) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} + j2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$$

$$2\angle 135^\circ = 2\cos(135^\circ) + j2\sin(135^\circ) = -2\frac{\sqrt{2}}{2} + j2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} + j\sqrt{2}$$



CONTROL SYSTEMS

예제 2-1

- 극 좌표(radian)에서 직교 좌표로

$$1\angle(\pi/4) = \cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1\angle(-\pi/2) = \cos(-\pi/2) + j\sin(-\pi/2) = -j$$

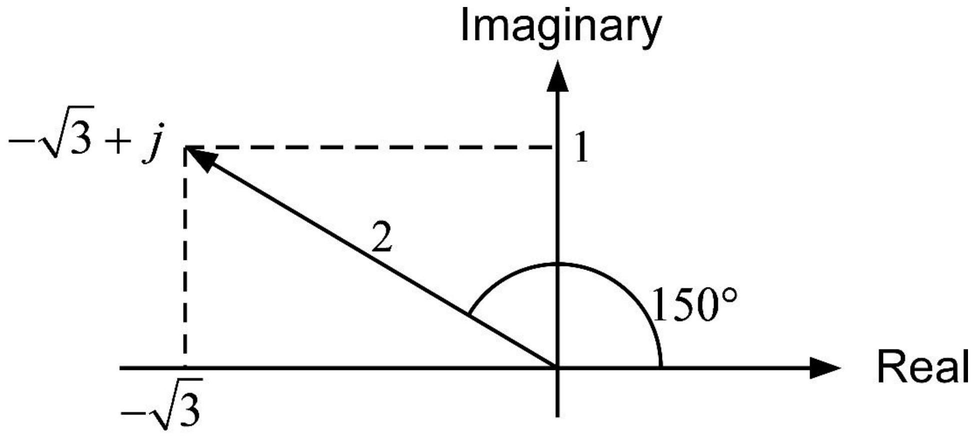
예제 2-2

- **직교 좌표에서 극 좌표로**

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$-\sqrt{3}+j=\sqrt{3+1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+j\sqrt{3+1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

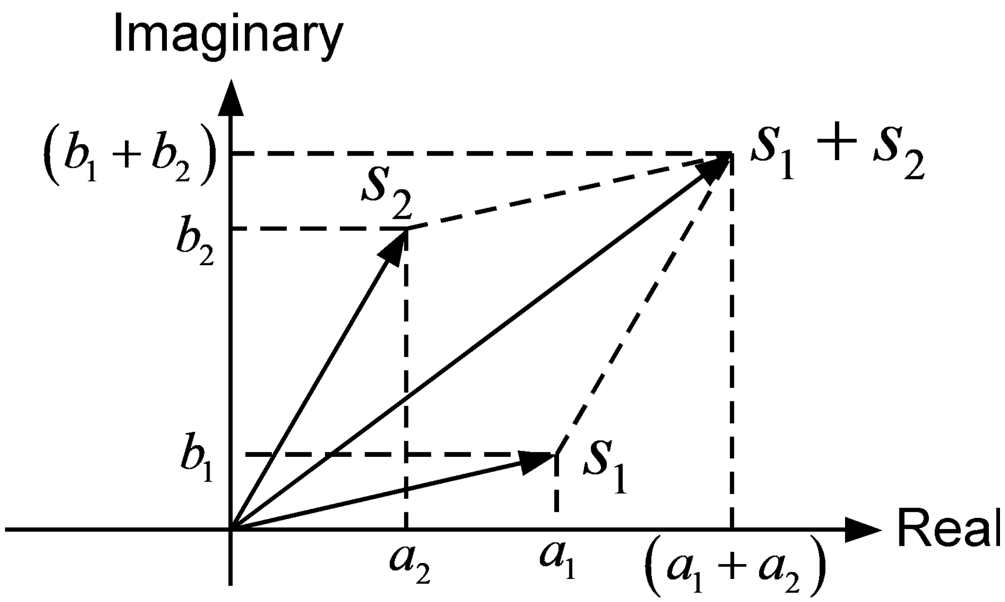
$$=2\cos(180^\circ-30^\circ)+j2\sin(180^\circ-30^\circ)=2\angle(150^\circ)$$



복소수의 덧셈

$$S_1 = a_1 + jb_1, \quad S_2 = a_2 + jb_2$$

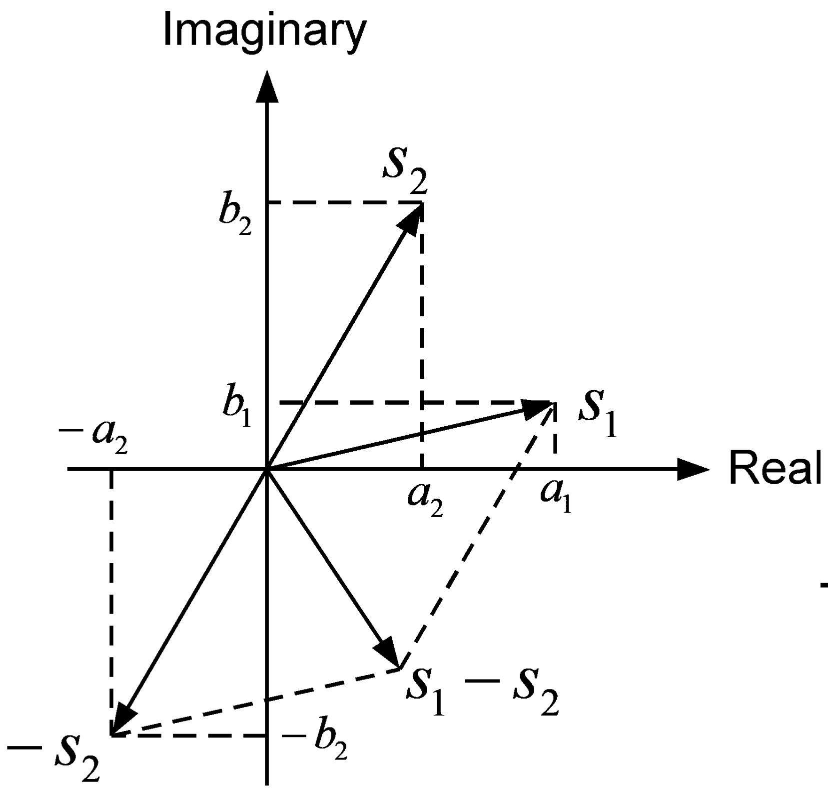
$$S_1 + S_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

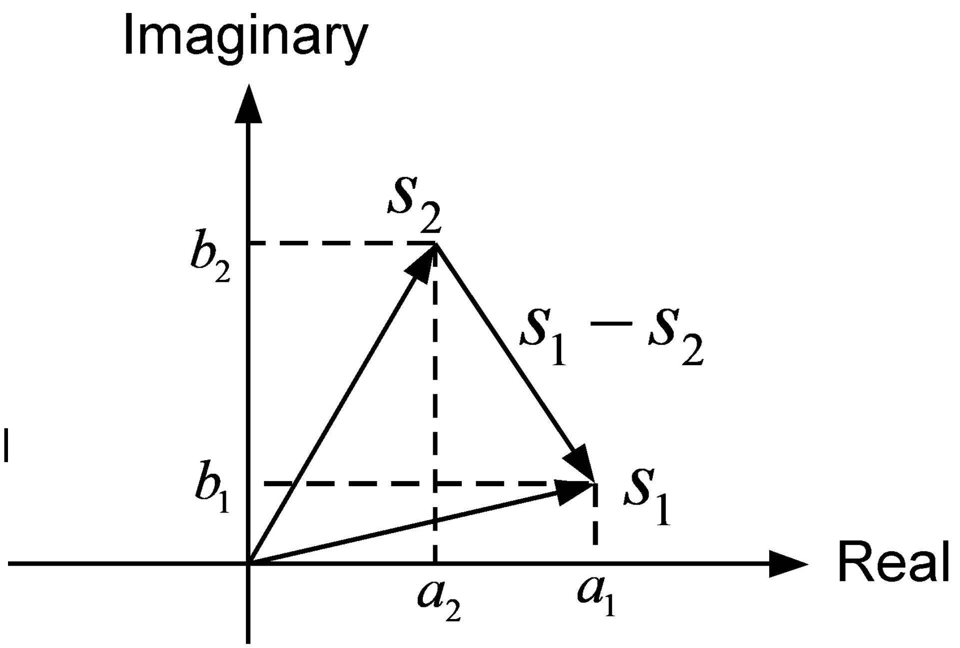


복소수의 뺄셈

$$S_1 = a_1 + jb_1, \quad S_2 = a_2 + jb_2$$

$$S_1 - S_2 = a_1 + jb_1 - a_2 - jb_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$





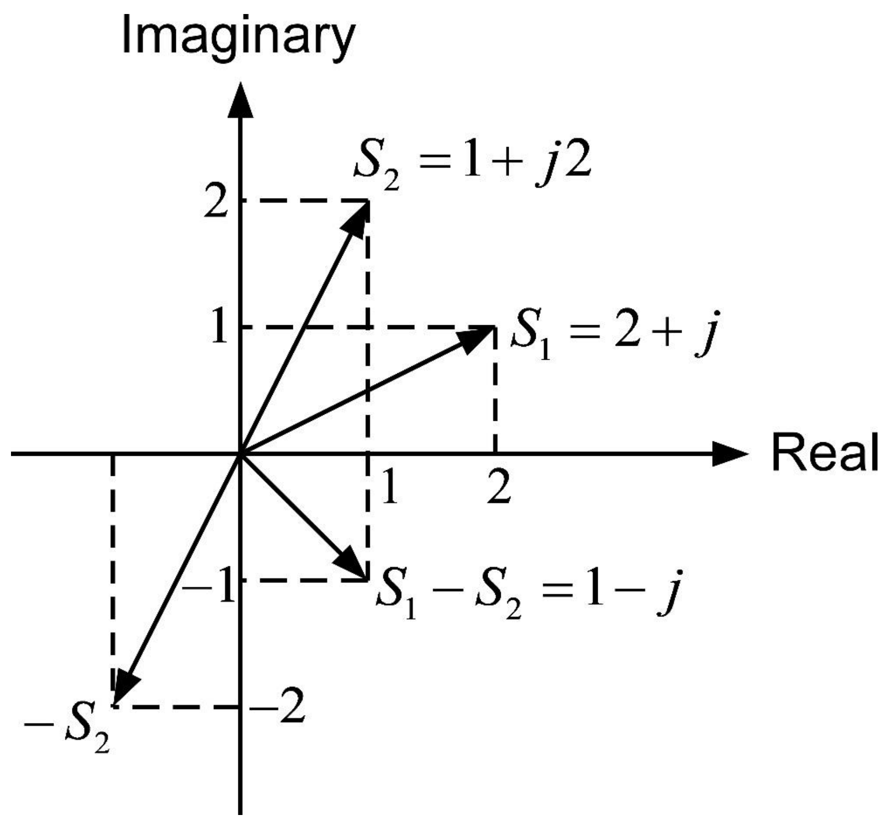
$$S_2 + (S_1 - S_2) = S_1$$

예제 2-3

- **복소수 뺄셈의 예**

$$S_1 = 2 + j, S_2 = 1 + j2$$

$$S_1 - S_2 = (2-1) + j(1-2) = 1 - j$$



CONTROL SYSTEMS

복소수의 곱셈

- 복소수의 곱셈은 극 좌표를 이용하는 것이 편리
- 극 좌표에서는 복소수의 크기는 곱하고 각도는 더함

$$S_1S_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1a_2 + ja_1b_2 + ja_2b_1 + j^2b_1b_2$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1)$$

$$S_1 = r_1\angle\theta_1 = (r_1\cos\theta_1) + j(r_1\sin\theta_1) = r_1e^{j\theta_1}$$
$$S_2 = r_2\angle\theta_2 = (r_2\cos\theta_2) + j(r_2\sin\theta_2) = r_2e^{j\theta_2}$$

$$S_1S_2 = (r_1e^{j\theta_1})(r_2e^{j\theta_2}) = r_1r_2e^{j\theta_1}e^{j\theta_2} = r_1r_2e^{j(\theta_1+\theta_2)} = r_1r_2\angle(\theta_1+\theta_2)$$

복소수의 나눗셈

- 복소수의 나눗셈은 극 좌표를 이용하는 것이 편리
- 극 좌표에서는 복소수의 크기는 나누고 각도는 뺌

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{a_1a_2 - ja_1b_2 - ja_2b_1 - j^2b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) - j(a_1b_2 + a_2b_1)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1e^{j\theta_1}}{r_2e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\frac{e^{j\theta_1}}{e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2)$$

예제 2-4

$$S_1 = 1\angle 60^\circ = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, S_2 = 2\angle 30^\circ = \sqrt{3} + j$$

$$S_1 \cdot S_2 = \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3} + j\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + j\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = j2$$

$$S_1 \cdot S_2 = 2\angle\left(60^\circ + 30^\circ\right) = 2\angle 90^\circ = j2$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}+j}=\frac{\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}-j\right)}{\left(\sqrt{3}+j\right)\left(\sqrt{3}-j\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+j\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1\angle 60^\circ}{2\angle 30^\circ}=\frac{1}{2}\angle\left(60^\circ-30^\circ\right)=\frac{1}{2}\angle 30^\circ=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\right)$$

2.2 미분 방정식

- 방정식: 미지수를 포함하는 식
- 방정식을 푸는 것: 방정식을 만족하는 미지수의 값을 구함

- 대수 방정식: $x + x = 2x = 1$

- 미분 방정식: 변수의 미분 항을 포함하는 방정식

- 1차 미분 방정식: $\dot{x} + x = 0, \quad \dot{x} = -x$

1차 미분 방정식

- 1차 미분 방정식의 해(solution): 1차 미분 방정식을 만족하는 함수

$$\dot{x} + x = 0, \quad \dot{x} = -x$$

- 위의 식에서 양변의 함수가 같은 모양의 함수, 즉 함수 자신과 함수의 미분 함수가 같은 모양이어야 함

$$x = t^2, \dot{x} = 2t \Rightarrow \dot{x} \neq -x$$

$$x = \cos t, \dot{x} = -\sin t \Rightarrow \dot{x} \neq -x$$

- 지수 함수는 미분을 해도 원래 함수의 모양이 포함됨

$$x = Ke^{\lambda t}, \dot{x} = K\lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x} = K\lambda e^{\lambda t} = -x = -Ke^{\lambda t}$$

1차 미분 방정식

- 미분 방정식을 만족하는 지수 함수를 찾음:

$$\dot{x} = K\lambda e^{\lambda t} = -x = -Ke^{\lambda t} \Rightarrow K(\lambda + 1)e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow x(t) = Ke^{-t}$$

- 초기 조건 값을 이용:

$$x(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow x(t) = e^{-t}$$

1차 미분 방정식: 우측 항이 0이 아닌 경우

- 1차 미분 방정식: $\dot{x} + x = 1$
- 미분 방정식의 해도 상수 항을 가질 것이라고 가정:

$$x(t) = K_1 e^{\lambda t} + K_2$$

$$\dot{x} + x = K_1 \lambda e^{\lambda t} + K_1 e^{\lambda t} + K_2 = 1$$

$$K_2 = 1, K_1 \left(\lambda + 1\right) e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$x(t) = K_1 e^{-t} + 1$$

$$x(0) = K_1 + 1 = 0 \Rightarrow K_1 = -1 \Rightarrow x(t) = -e^{-t} + 1$$

- 완전해 = 일반해 + 특별해

2차 미분 방정식

- 미분 방정식: $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$

$$x=Ke^{\lambda t},\dot{x}=K\lambda e^{\lambda t},\ddot{x}=K\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=K\lambda^2 e^{\lambda t}+3K\lambda e^{\lambda t}+2Ke^{\lambda t}$$

$$=K\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)e^{\lambda t}=0\Rightarrow$$

$$\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0\Rightarrow\lambda=-1,-2$$

- 특성 방정식(Characteristic equation)

- 미분 방정식의 해: $x(t)=K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}$

▪ 초기 조건이 2개가 필요: 2개의 상수 결정

$$x(0) = K_1 + K_2 = 1, \dot{x}(0) = -K_1 - 2K_2 = 0$$

$$K_1 = 2, K_2 = -1$$

$$x(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

2차 미분 방정식: 우측 항이 0이 아닌 경우

- 2차 미분 방정식: $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=1$
- 미분 방정식의 해도 상수 항을 가질 것이라고 가정:

$$x(t)=K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}+K_3$$

$$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=K\lambda^2e^{\lambda t}+3K\lambda e^{\lambda t}+2Ke^{\lambda t}+2K_3$$

$$=K\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)e^{\lambda t}+2K_3=1\Rightarrow K_3=0.5$$

$$x(t)=K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}+0.5$$

- 완전해 = 일반해 + 특별해

CONTROL SYSTEMS

- 초기 조건 2개를 이용하여 2개의 상수를 결정:

$$x(0) = K_1 + K_2 + 0.5 = 0, \dot{x}(0) = -K_1 - 2K_2 = 0$$

$$K_1 = -1, K_2 = 0.5$$

$$x(t) = -e^{-t} + 0.5e^{-2t} + 0.5$$

2차 미분 방정식

- **미분 방정식:** $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$

$$x = Ke^{\lambda t}, \dot{x} = K\lambda e^{\lambda t}, \ddot{x} = K\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = K\lambda^2 e^{\lambda t} + 3K\lambda e^{\lambda t} + 2Ke^{\lambda t}$$

$$= K\left(\lambda^2 + 2\lambda + 5\right)e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm j2$$

- **특성 방정식의 근이 복소수 인 경우 임**

$$x = K_1 e^{(-1+j2)t} + K_2 e^{(-1-j2)t}$$

$$x = K_1 e^{(-1+j2)t} + K_1^* e^{(-1-j2)t} = 2\,\mathrm{Re}\left\{K_1 e^{(-1+j2)t}\right\}$$

$$x(0) = K_1 + K_1^* = 1$$

$$\dot{x}(0) = K_1(-1+j2) + K_1^*(-1-j2) = 0$$

$$K_1 = 0.5 - j0.25, \quad K_1^* = 0.5 + j0.25$$

$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(0.5 - j0.25\right)e^{(-1+j2)t}\right\} = e^{-t}\left(0.5\cos 2t + 0.25\sin 2t\right)$$

- 오일러(Euler)의 공식이 사용 됨: $e^{j2} = \cos 2t + j\sin 2t$

n차 미분 방정식

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x^{(1)} + a_0 x = u$$

- 위의 방정식을 상계수 선형 미분 방정식(constant coefficient linear differential equation)이라고 부름

- 일반적으로 선형 시불변 시스템(linear time-invariant system)의 동적 특성은 위와 같은 형태의 미분 방정식으로 나타낼 수 있음

2.4 라플라스 변환

- 간단한 제어 시스템은 미분 방정식만으로 해석과 설계가 가능할 수 있음
- 대부분의 제어 시스템은 여러 가지 형태의 블록이 서로 연결되어 구성되어 있으며, 이러한 복잡한 시스템을 미분 방정식을 이용하여 해석하는 것은 매우 복잡함
- 해석을 좀더 쉽게 하기 위해서 수학적 도구를 도입
- 제어 시스템에서 가장 많이 사용되는 수학적 도구로 라플라스 변환(Laplace Transform)이 있음

라플라스 변환의 정의

- 라플라스 변환의 정의

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

- 무한 적분이 수렴하기 위한 조건

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)e^{-\sigma t} \right| dt < \infty$$

- 라플라스 변환을 하면 함수의 변수가 t 에서 s 로 바뀜

단방향 라플라스 변환

- one-sided Laplace transform

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- 회로 이론에서 사용되는 모든 함수는 t<0 의 범위에서는 함수 값이 0 이라고 가정할 수 있음. 단방향 라플라스 변환만을 사용

예제 2-5

▪ 단위 계단(unit-step) 함수

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

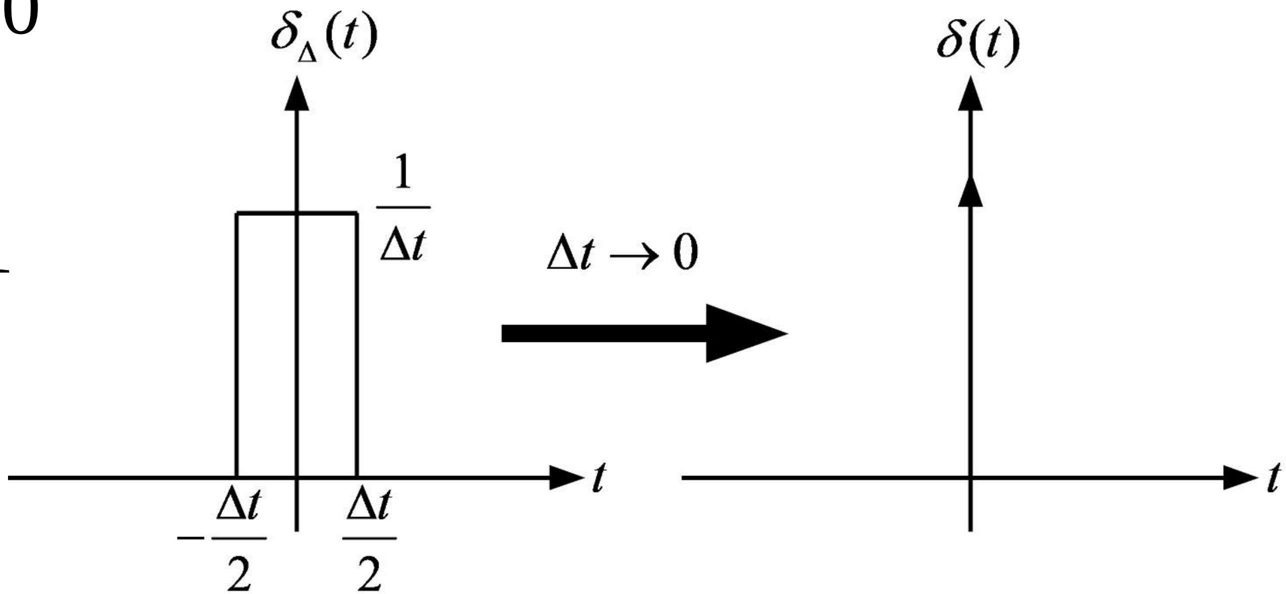
$$\mathcal{L}[u_s(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

예제 2-6

- **임펄스(impulse) 함수**

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$



$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\cdot 1dt = 1$$

예제 2-7

- **지수 함수**

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \int_{0^-}^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\right] = \frac{1}{s+2}$$

예제 2-8

$$\mathcal{L}[t] = \int_{0^-}^{\infty} te^{-st}dt = -\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_{t=0^-}^{t=\infty} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_{t=0^-}^{t=\infty} = \frac{1}{s^2}$$

- **부분 적분:** $\int_a^b f'(t)\cdot g(t)dt = \left(f(t)\cdot g(t)\right)\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)\cdot g'(t)dt$

예제 2-9

- Cosine 함수의 라플라스 변환

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t, \quad e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{j\omega t}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-j\omega t}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos 200\pi t] = \frac{s}{s^2 + (200\pi)^2}$$

- **선형성(Linearity)**

$$\mathcal{L}\left[kf(t)\right] = k\mathcal{L}\left[f(t)\right] = kF(s)$$

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) + f_2(t)\right] = \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] + \mathcal{L}\left[f_2(t)\right] = F_1(s) + F_2(s)$$

라플라스 변환의 특징

- 주파수 영역에서의 이동(Shift in the frequency domain)

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right]=F(s+a)$$

- 예제 2-10

$$\mathcal{L}\left[\cos\left(200\pi t\right)\right]=\frac{s}{s^2+\left(200\pi\right)^2}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos\left(200\pi t\right)\right]=\frac{s+2}{\left(s+2\right)^2+\left(200\pi\right)^2}$$

라플라스 변환의 특징

- **시간 영역에서의 이동(Shift in the time domain)**

$$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)$$

라플라스 변환의 특징

▪ 미분(Differentiation)

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \cdot \cdot \cdot - f^{(n-1)}(0)$$

라플라스 변환의 특징

- **적분(Integration)**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

CONTROL SYSTEMS

라플라스 변환의 특징

- **초기값 정리(Initial-value theorem)**

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

- **최종값 정리(Final-value theorem)**

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

- **예제 2-11**

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

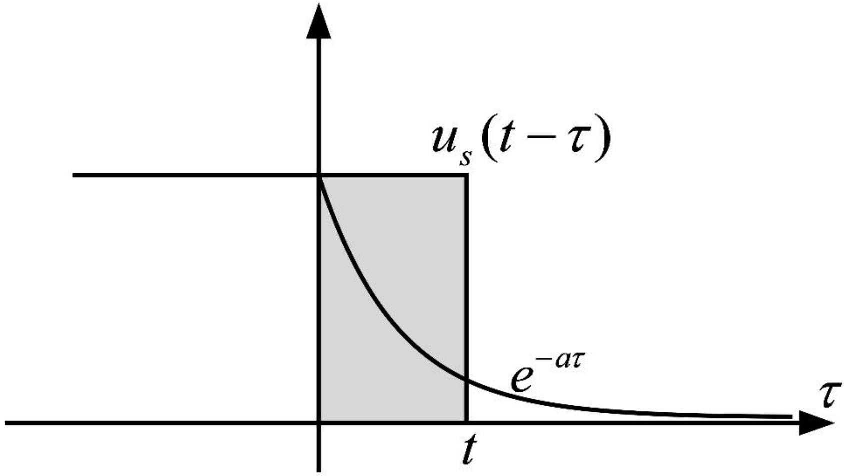
$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s+2} = \frac{1}{2}$$

▪ 컨벌루션(Convolution)의 정의

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

▪ 컨벌루션의 예



$$f_1(t) = e^{-at}, \quad f_2(t) = u_s(t)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t e^{-a\tau} u_s(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = -\frac{1}{a} e^{-at} + \frac{1}{a}$$

CONTROL SYSTEMS

라플라스 변환의 특징

▪ 컨벌루션(Convolution)과 라플라스 변환

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right]$$

$$= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s) F_2(s)$$

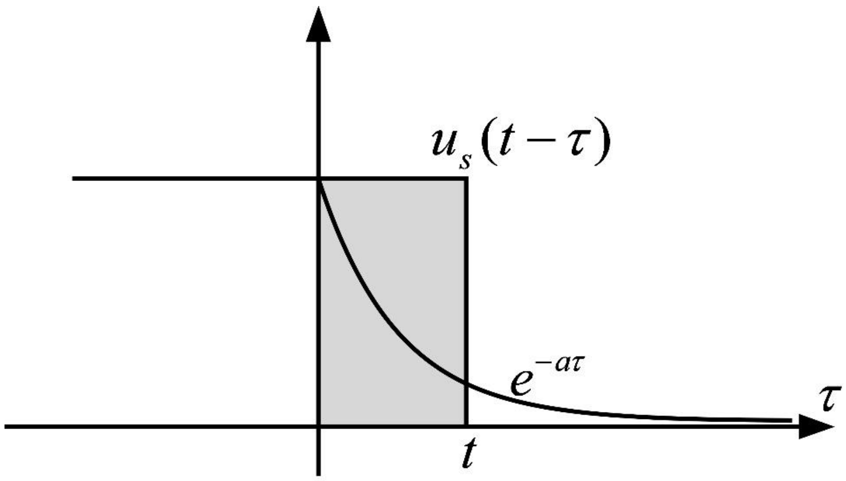
$$\mathcal{L}\left[f_1(t) f_2(t)\right] = F_1(s) * F_2(s)$$

예제 2-12

$$f_1(t) = e^{-at}, \quad f_2(t) = u_s(t)$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+a}, \quad \mathcal{L}\left[u_s(t)\right] = \frac{1}{s}$$

$$f_1(t) * f_2(t) = -\frac{1}{a}e^{-at} + \frac{1}{a}$$



$$\mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = \mathcal{L}\left[-\frac{1}{a}e^{-at} + \frac{1}{a}\right] = \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{s+a} + \frac{1}{s}\right)$$

$$= \frac{1}{s(s+a)} = \mathcal{L}\left[f_1(t)\right]\cdot\mathcal{L}\left[f_2(t)\right]$$

역라플라스 변환(Inverse Laplace transform)

- 라플라스 변환으로 주어진 어떤 함수에 대해서 원래의 함수를 찾아야 하는 경우에 필요함

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{st}ds$$

- 대부분의 경우 부분 분수 분해를 이용해서 구함

역라플라스 변환(Inverse Laplace transform)

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 6} \qquad G(s) = \frac{2}{(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3}$$

$$G(s) = \frac{2}{(s+2)(s+3)} = \frac{(K_1 + K_2)s + 3K_1 + 2K_2}{(s+2)(s+3)}$$

$$K_1 + K_2 = 0,\ 3K_1 + 2K_2 = 2 \qquad K_1 = 2,\ K_2 = -2$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+3}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+3}\right] = 2e^{-2t} - 2e^{-3t},\ t \geq 0$$

부분 분수 분해

▪ 분모가 단근(simple root) 만을 갖는 경우

$$G(s)=\frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=\frac{K_1}{s+p_1}+\frac{K_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s+p_n}$$

$$G(s)(s+p_i)=\frac{K_1(s+p_i)}{s+p_1}+\frac{K_2(s+p_i)}{s+p_2}\cdots+K_i+\cdots\frac{K_n(s+p_i)}{s+p_n}$$

$$K_i=G(s)\left(s+p_i\right)\Big|_{s=-p_i}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_1}{s+p_1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_2}{s+p_2}\right]+\cdots+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_n}{s+p_n}\right]$$

$$=K_1e^{-p_1t}+K_2e^{-p_2t}+\cdots+K_ne^{-p_nt}$$

예제 2-13

$$G(s) = \frac{2}{(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3}$$

$$K_1 = \frac{2}{(s+2)(s+3)}(s+2)\bigg|_{s=-2} = 2$$

$$K_2 = \frac{2}{(s+2)(s+3)}(s+3)\bigg|_{s=-3} = -2$$

예제 2-14

$$G(s)=\frac{2}{s^2+2s+5}=\frac{2}{(s+1+j2)(s+1-j2)}=\frac{K_1}{s+1+j2}+\frac{K_2}{s+1-j2}$$

$$K_1=\frac{2}{(s+1+j2)(s+1-j2)}(s+1+j2)\bigg|_{s=-1-j2}=\frac{j}{2}$$

$$K_2=\frac{2}{(s+1+j2)(s+1-j2)}(s+1-j2)\bigg|_{s=-1+j2}=-\frac{j}{2}$$

$$G(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{j}{s+1+j2}+\frac{-j}{s+1-j2}\right)$$

$$g(t)=\frac{1}{2}\left(je^{-(1+j2)t}-je^{-(1-j2)t}\right)=e^{-t}\left[\frac{(e^{j2t}-e^{-j2t})}{2j}\right]=e^{-t}\sin 2t$$

예제 2-14(또 다른 해)

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$G_1(s) = \frac{2}{s^2 + 2^2} \qquad g_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \sin 2t$$

- **주파수 영역에서의 이동을 이용:** $\mathcal{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s+a)$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right] = e^{-t} \sin 2t$$

분모가 중근(multiple roots)을 갖는 경우

$$G(s)=\frac{s^2}{(s+2)^3}=\frac{K_1}{(s+2)^3}+\frac{K_2}{(s+2)^2}+\frac{K_3}{(s+2)}$$

$$G(s)(s+2)^3\Big|_{s=-2}=\left[K_3(s+2)^2+K_2(s+2)+K_1\right]\Big|_{s=-2}=K_1 \Rightarrow$$

$$s^2\Big|_{s=-2}=K_1=4$$

$$\left.\frac{dG(s)(s+2)^3}{ds}\right|_{s=-2}=\left[2K_3(s+2)+K_2\right]\Big|_{s=-2}=K_2 \Rightarrow$$

$$\left.\frac{d\left(s^2\right)}{ds}\right|_{s=-2}=2s\Big|_{s=-2}=K_2=-4$$

분모가 중근(multiple roots)을 갖는 경우

$$\left.\frac{d^2 G(s)(s+2)^3}{ds^2}\right|_{s=-2} = 2K_3 \Rightarrow$$

$$\left.\frac{d^2\left(s^2\right)}{ds^2}\right|_{s=-2} = 2K_3 = 2$$

$$G(s) = \frac{4}{(s+2)^3} - \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)} \qquad g(t) = e^{-2t}\left(2t^2 - 4t + 1\right)$$

▶ 참고: $\mathcal{L}\left[\left(2t^2 - 4t + 1\right)\right] = \frac{4}{s^3} - \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s}$

분모가 중근(multiple roots)을 갖는 경우

$$G(s)=\frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_{i-1})(s+p_i)^r}$$

$$=\frac{K_1}{s+p_1}+\frac{K_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{K_{i-1}}{s+p_{i-1}}$$

$$+\frac{K_{i1}}{(s+p_i)^r}+\frac{K_{i2}}{(s+p_i)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{ir}}{(s+p_i)^1}$$

$$K_{ij}=\frac{1}{(j-1)!}\left.\frac{d^{\,j-1}G(s)(s+p_i)^r}{ds^{\,j-1}}\right|_{s=-p_i},\ j=1,2,\ldots,r$$

라플라스 변환을 이용한 미분 방정식의 해

▪ 예제 2-15

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y=u_s(t) \qquad y(0)=1,\ y^{(1)}(0)=0$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y^{(1)}(0)+5\big(sY(s)-y(0)\big)+6Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$\left(s^2+5s+6\right)Y(s)=\frac{1}{s}+s+5=\frac{s^2+5s+1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{s^2+5s+1}{s\left(s^2+5s+6\right)}=\frac{s^2+5s+1}{s(s+2)(s+3)} \qquad Y(s)=\frac{1/6}{s}+\frac{5/2}{s+2}-\frac{5/3}{s+3}$$

$$y(t)=\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{2}e^{-2t}-\frac{5}{3}e^{-3t}\right)u_s(t)$$

푸리에 시리즈 (Fourier series)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \right) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

푸리에 변환(Fourier transform)

- 푸리에 시리즈:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- 푸리에 변환: 푸리에 시리즈의 주기를 무한대로

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

- 라플라스 변환: $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \qquad s = \sigma + j\omega$

CONTROL SYSTEMS

행렬(matrix)

- mxn 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

정방 행렬(square matrix)

- m=n

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

- 대각 행렬(diagonal matrix)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

단위 행렬(identity matrix)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

전치 행렬(transpose matrix)

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & -2 \\ -4 & 7 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

행벡터, 열벡터(row vector, column vector)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

행렬의 덧셈과 뺄셈

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

행렬의 곱셈

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

$$AB = C = \left[c_{ij} \right], c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

행렬의 곱셈

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 & 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \\ (-5) \cdot 2 + 6 \cdot (-1) & (-5) \cdot 3 + 6 \cdot 6 & (-5) \cdot 5 + 6 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

단위 행렬과 곱셈

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

덧셈과 곱셈의 전치 행렬

$$\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$$

$$\left(AB\right)^T = B^T A^T$$

행렬식(Determinant)

- 2x2 행렬의 행렬식

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 3x3 행렬의 행렬식

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\left|M_{11}\right| - a_{21}\left|M_{21}\right| + a_{31}\left|M_{31}\right|$$

- 소행렬식(minor)

$$\left|M_{11}\right| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \left|M_{21}\right| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \left|M_{31}\right| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

행렬식

▪ 3x3 행렬의 행렬식 예

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 7 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 5(18-14) - 4(9-4) + 8(21-12) = 5\cdot 4 - 4\cdot 5 + 8\cdot 9 = 72$$

- 3x3 행렬의 행렬식

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\left|M_{12}\right| - a_{22}\left|M_{22}\right| + a_{32}\left|M_{32}\right|$$

$$= a_{13}\left|M_{13}\right| - a_{23}\left|M_{23}\right| + a_{33}\left|M_{33}\right|$$

$$= a_{11}\left|M_{11}\right| - a_{12}\left|M_{12}\right| + a_{13}\left|M_{13}\right|$$

여인수(cofactor)

- **여인수를 이용한 행렬식**

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\gamma_{ij}$$

nxn행렬의 행렬식

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\gamma_{ij}$$

- **위의 식에서** j **는** $1,2,\ldots n$ **중 어느 것이라도 상관 없다.**

행렬식에 관한 관계식

$$|A| = |A^T|$$

$$|AB| = |A||B|$$

$$|A||A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A||C|$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+5c & 3b+5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a+2c=1, b+2d=0, 3a+5c=0, 3b+5d=1$$

$$\Rightarrow a=-5, b=2, c=3, d=-1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+6 & 2-2 \\ -15+15 & 6-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

역행렬

- 수반 행렬 (adjugate, adjoint)

$$\operatorname{adj} A = \left[\gamma_{ij} \right]^T, \gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|$$

$$A \operatorname{adj} A = |A| I$$

- 역행렬

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|}$$

역행렬

- 2x2 행렬의 역행렬

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\text{adj } A}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

▪ 역행렬의 예

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}{5-6} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

연립 방정식

$$x_1 + 2x_2 = 1$$
$$3x_1 + 5x_2 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

특이 행렬(singular matrix)

- **해가 없는 연립 방정식**

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{adj}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

고윷값(eigenvalue)

- 행렬 A 에 대해서 고윷값(eigenvalue)은 다음과 같은 식을 만족하는 어떤 수 λ 로 정의
- 아래의 식에서 x 는 0 이 아닌 벡터이며, 이를 고유 벡터 (eigenvector)라고 부름

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda x$$

$$\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2\\ -5 & \lambda-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2\\ -5 & \lambda-4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\frac{\operatorname{adj}\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2\\ -5 & \lambda-4\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -5 & \lambda-4\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

- 벡터 x는 0 이 아니라는 조건이 있으므로, 이 조건을 만족하기 위해서는 위 식의 분모는 0 이어야 함

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -5 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)-10=\lambda^2-5\lambda-6=(\lambda-6)(\lambda+1)=0$$

$$\lambda=6,-1$$

- **고윳값을 구하는 식**

$$\left|\lambda I - A\right| = 0$$

- **고유 벡터(eigenvector)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 6x_1 \\ 5x_1 + 4x_2 &= 6x_2 \end{aligned}$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 5 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

예제 2-19

- 고유값을 구하는 예제

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -5 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \right|$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 4$$