미분 방정식

일반적으로 방정식은 미지수를 포함하는 식으로서, 방정식을 푼다고 하는 것은 주어진 방정식을 만족하는 미지수의 값을 구하는 것을 말한다. 예를 들어서 아래와 같은 방정식이 주어졌다면, 이 방정식을 만족하는 미지수 x 의 값은 0.5 이다. 이와 같은 방정식을 대수 방정식(algebraic equation)이라고 부른다.

$$x + x = 2x = 1 \tag{2.1}$$

만약 방정식이 변수 x 의 미분 항인 dx/dt 을 포함하고 있다면, 이러한 방정식은 미분 방정식이라고 부른다. 변수 x 의 미분은 dx/dt 로 표시하거나 $\dot{x}$ 으로 표시할 수 있다.

● 1차 미분 방정식

간단한 미분 방정식의 예로서, 식(2.1)의 첫째 항을 변수 x 의 미분인 $\dot{x}$ 으로 바꾸고, 우측의 항을 0으로 바꾸면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다. 이 미분 방정식을 만족하는 x 를 구해 본다.

$$\dot{x} + x = 0 \tag{2.2}$$

만약 식(2.1)를 만족하는 x 가 상수라고 가정한다면, $\dot{x} = 0$ 이므로(상수의 미분은 0) 식(2.2)를 만족하는 x 의 값은 0 이다. 그러나, x 가 상수가 아니라고 가정한다면, x 는 시간 변수 t 의 함수, 즉 $x(t)$ 가 될 것이며, 이 방정식을 푼다고 하는 것은 이 식을 만족하는 시간의 함수 $x(t)$ 를 구하는 것이다. 식(2.2)를 만족하는 함수를 구하기 위해서 식(2.2)를 아래와 같이 변형을 한다.

$$\dot{x} = -x \tag{2.3}$$

식(2.3)을 만족하는 함수의 형태는 미분을 했을 때 원래의 형태가 그대로 유지되는 형태를 가져야 한다. 예를 들면 $x = t^2$ 이라고 가정 한다면 미분을 했을 때, $\dot{x} = 2t$ 가 되므로 식(2.3)을 만족할 수 없다. 또한 $x = \cos t$ 라고 가정한다면, $\dot{x} = -\sin t$ 가 되므로 역시 식(2.3)을 만족할 수 없다. 미분을 했을 때, 원래의 함수 형태가 유지되는 함수는 지수 함수(exponential function)이다. 즉, $x = Ke^{\lambda t}$ (K 와 λ 는 상수)라고 한다면, $\dot{x} = K\lambda e^{\lambda t}$ 이므로, 원래의 함수와 미분 된 함수가 같은 형태의 지수 함수 $e^{\lambda t}$ 를 포함하고 있다. 이들을 식(2.3)에 대입하면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\dot{x} = K\lambda e^{\lambda t} = -x = -Ke^{\lambda t} \tag{2.4}$$

식(2.4)에서 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$K(\lambda + 1)e^{\lambda t} = 0 \tag{2.5}$$

식(2.5)의 관계가 성립하기 위해서는 $K=0$ 이거나 $\lambda=-1$ 이다. $K=0$ 인 경우는 x 가 상수인 경우에 해당하므로, x 가 상수가 아니라면 λ 의 값은 -1 이어야 한다. 따라서 방정식(2.2)를 만족하는 x 는

$$x(t)=Ke^{-t} \tag{2.6}$$

이다. 식(2.6)에서 K 의 값은 $x(t)$ 의 초기 값, 즉 $x(0)$ 에 의해서 결정될 수 있다. 예를 들면, $x(0)=1$ 이라면, 식(2.6)으로부터 $K=1$ 이라고 결정할 수 있다. 식(2.1)과 같이 변수의 미분 항을 포함하지 않는 방정식을 대수 방정식, 식(2.2)와 같이 변수의 미분 항을 포함하는 방정식을 미분 방정식이라고 한다. 대수 방정식의 해(solution)는 상수 값이지만, 미분 방정식의 해는 상수가 아닌 시간에 대한 함수이다. 또한 초기 조건이 지정되지 않는다면 미분 방정식에는 여러 개의 해가 있을 수 있지만, 초기 조건이 지정된다면 미분 방정식의 해는 유일하게 결정할 수 있다.

다음으로 식(2.2)의 미분 방정식의 우측 항을 1로 바꾸어서, 다음과 같은 미분 방정식을 풀어 본다.

$$\dot{x}+x=1 \tag{2.7}$$

이 방정식의 해 역시 지수 함수의 형태를 가질 것으로 예상 되지만, 방정식의 우변에 있는 상수의 존재로 인하여 다음과 같은 형태의 해를 가진다고 가정해 볼 수 있다.

$$x(t)=K_1e^{\lambda t}+K_2 \tag{2.8}$$

식(2.8)을 식(2.7)에 대입하면 다음과 같다.

$$\dot{x}+x=K_1\lambda e^{\lambda t}+K_1e^{\lambda t}+K_2=1 \tag{2.9}$$

식(2.9)를 만족하는 K_2 는 1이여야 한다. 만약 K_2 가 1이 아니라면 식(2.9)의 관계는 성립할 수 없다. 따라서 식(2.9)는 다음의 식으로 바뀐다.

$$K_1\left(\lambda+1\right)e^{\lambda t}=0 \tag{2.10}$$

위의 식으로부터 $\lambda=-1$ 이어야 하므로, 식(2.6)의 해는 다음과 같은 식이다.

$$x(t)=K_1e^{-t}+1 \tag{2.11}$$

식(2.11)에서 K_1 은 초기 조건으로 정할 수 있다. 예를 들어, $x(0)=0$ 이라고 가정하면,

$$x(0)=K_1+1=0 \tag{2.12}$$

이므로, $K_1=-1$ 이 되어, 미분 방정식의 해가 유일하게 결정된다. 이 미분 방정식의 해는 두 개

의 항으로 구성되어 있다. 첫째 항은 지수 함수형태의 항이며, 둘째 항은 상수 형태의 항이다. 지수 함수 형태의 항을 일반해(homogeneous solution), 상수 형태의 항을 특별해(particular solution)이라고 부른다. 앞서 풀었던 식(2.2) 미분 방정식의 해는 일반해의 형태만 가지고 있음을 알 수 있다. 일반적으로 일반해는 지수 함수 형태를 가지게 되고, 특별해는 미분 방정식의 우측 항의 형태에 따라서 달라진다. 이 미분 방정식의 경우는 우측 항이 상수이므로 특별해도 상수 값을 가진 경우이다.

● 2차 미분 방정식

다음으로 좀더 복잡한 경우로 두 번 미분한 변수를 포함한 다음과 같은 미분 방정식을 풀어 본다.

$$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0 \tag{2.13}$$

위에서 설명한 방법과 마찬가지로 이 방정식의 해는 $x=Ke^{\lambda t}$ 의 형태를 가진다고 가정하면, $\dot{x}=K\lambda e^{\lambda t}$ 이고, $\ddot{x}=K\lambda^2 e^{\lambda t}$ 이므로, 이 식들을 식(2.13)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=K\lambda^2 e^{\lambda t}+3K\lambda e^{\lambda t}+2Ke^{\lambda t}=K\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)e^{\lambda t}=0 \tag{2.14}$$

위의 식에서 K 가 0이 아니고 가정하면, λ 는 다음의 식을 만족해야 한다.

$$\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0 \tag{2.15}$$

위의 식을 만족하는 λ 는 -1 또는 -2 이므로 이 미분 방정식의 해를 다음과 같은 형태라고 가정한다.

$$x(t)=K_1e^{-t}+K_2e^{-2t} \tag{2.16}$$

위와 같은 형태의 미분 방정식의 해를 구하기 위해서 풀어야 하는 방정식 (2.15)를 미분 방정식의 특성 방정식(characteristic equation)이라고 부른다. 두 번 미분한 항을 포함한 미분 방정식의 해를 유일하게 결정하기 위해서는 두 개의 초기 조건이 필요하다. 즉 $x(0)$ 의 값과 $\dot{x}(0)$ 의 값이 있어야 미분 방정식의 해를 유일하게 결정할 수 있다. $x(0)$ 의 값과 $\dot{x}(0)$ 의 값이 있으며, $\ddot{x}(0)$ 값은 식(2.13)에 의해서 결정이 되므로 $\ddot{x}(0)$ 의 값은 필요하지 않다. 예를 들어서 $x(0)=1, \dot{x}(0)=0$ 이라고 가정하면, 다음의 식 들을 얻을 수 있다.

$$x(0)=K_1+K_2=1 \tag{2.17}$$

$$\dot{x}(0)=-K_1-2K_2=0 \tag{2.18}$$

위의 연립 방정식을 풀면, $K_1=2$, $K_2=-1$이므로, 미분 방정식의 해는 다음과 같이 결정된다.

$$x(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \tag{2.19}$$

즉, 이 식은 미분 방정식과 두 개의 초기 조건을 모두 만족하는 미분 방정식의 해가 된다. 만약 식(2.16)에서 K_1e^{-t} 와 K_2e^{-2t} 중 한 개의 항만을 포함해서 가정했다면, 식(2.13)은 만족하겠지만, 두 개의 초기 조건을 만족하는 해는 구할 수 없을 것이다. 변수의 미분을 두 번한 항을 포함하는 미분 방정식을 2차 미분 방정식이라고 부르며, 초기 조건은 위에서 설명한 바와 같이 두 개의 초기 조건을 이용하여 유일한 해를 결정한다. 2차 미분 방정식의 해를 구하기 위해서 필요한 특성 방정식은 2차 대수 방정식이다. 만약 n번 미분한 항을 포함하는 미분 방정식이 있다면, 이는 n차 미분 방정식이라 부르며, 이에 대한 특성 방정식은 n차 대수 방정식이며, n개의 초기 조건으로 유일한 해를 결정한다.

다음으로, 위의 2차 미분 방정식과 좌측 변은 같지만 우측 항이 0이 아닌 상수인 다음 식과 같은 미분 방정식을 풀어본다.

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 1 \tag{2.20}$$

위의 예에서 본 2차 미분 방정식과 좌측 변이 같으므로, 방정식의 해가 가지는 지수 함수 항은 같은 형태를 가진다. 따라서, 이 방정식의 해는 다음과 같은 형태를 가진다고 가정해 볼 수 있다.

$$x(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{-2t} + K_3 \tag{2.21}$$

위의 식을 식(2.20) 대입하면 다음 과 같은 식을 얻을 수 있다. K_3 는 상수이므로 미분 하면 0이 된다는 사실을 염두에 둔다.

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = K\lambda^2 e^{\lambda t} + 3K\lambda e^{\lambda t} + 2Ke^{\lambda t} + 2K_3 = K\left(\lambda^2 + 3\lambda + 2\right)e^{\lambda t} + 2K_3 = 1 \tag{2.22}$$

위의 식을 만족하는 K_3 는 0.5 이다. 초기 조건을 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ 이라고 가정한다면 다음의 식들을 얻을 수 있다.

$$x(0) = K_1 + K_2 + 0.5 = 0 \tag{2.23}$$

$$\dot{x}(0) = -K_1 - 2K_2 = 0 \tag{2.24}$$

위의 연립 방정식을 풀면, $K_1 = -1$, $K_2 = 0.5$ 이므로, 미분 방정식의 해는 다음과 같이 결정된다.

$$x(t) = -e^{-t} + 0.5e^{-2t} + 0.5 \tag{2.25}$$

앞에서 설명한 1차 미분 방정식의 경우와 마찬가지로, 이 해의 지수 함수 항은 일반 해, 상수 항은 특별 해 라고 부른다.

2차 미분 방정식의 예로서 좀더 복잡한 경우를 고려해 보기 위해서 다음과 같은 미분 방정식을 풀어 본다.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0 \tag{2.26}$$

위의 예들에서 보았던 중간 과정은 비슷하므로, 중간 과정은 생략하고 다음과 같은 특성 방정식을 세워서 해를 구한다.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \tag{2.27}$$

이 특성 방정식의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda = -1 \pm j2 \tag{2.28}$$

앞의 예와 이 방정식의 차이점은 특성 방정식의 근이 실수가 아닌 복소수 라는 점이다. 이 경우에도 유사한 방법으로 진행이 가능하다. 즉 이 방정식의 해는 다음과 같은 형태를 가지게 된다.

$$x = K_1 e^{(-1+j2)t} + K_2 e^{(-1-j2)t} \tag{2.29}$$

자세한 내용은 생략하고, 위의 식에서 계수 K_1 과 K_2 는 서로 켤레 복소수(conjugate complex number)의 관계를 가지므로, 다음과 같은 식으로 변형이 가능하다.

$$x = K_1 e^{(-1+j2)t} + K_1^* e^{(-1-j2)t} = 2\,\mathrm{Re}\left\{K_1 e^{(-1+j2)t}\right\} \tag{2.30}$$

초기 조건을 $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ 이라고 가정한다면 다음의 식들을 얻을 수 있다.

$$x(0) = K_1 + K_1^* = 1 \tag{2.31}$$

$$\dot{x}(0) = K_1(-1 + j2) + K_1^*(-1 - j2) = 0 \tag{2.32}$$

위의 식을 연립해서 풀면 다음의 값들을 구할 수 있다.

$$K_1 = 0.5 - j0.25 \tag{2.33}$$

$$K_1^* = 0.5 + j0.25 \tag{2.34}$$

위의 값들을 식에 대입하면 미분 방정식의 해는 다음과 같다.

$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\left(0.5 - j0.25\right) e^{(-1+j2)t}\right\} = e^{-t}\left(0.5\cos 2t + 0.25\sin 2t\right) \tag{2.35}$$

위의 과정에서 다음과 같은 오일러(Euler)의 공식이 사용되었다.

$$e^{j2t} = \cos 2t + j\sin 2t \tag{2.36}$$

특성 방정식의 근이 실수가 아닌 복소수인 경우라도, 기본적인 풀이 과정은 유사하다는 점을 알 수 있다. 다만 계산 과정에 복소수가 등장하므로 계산이 다소 복잡해 진다.

위의 예들과 같이 변수와 변수의 미분 항을 방정식의 왼쪽 변에 놓고, 변수와 관계 없는 항을 방정식의 오른쪽 변에 놓았을 때, 오른 쪽 변이 0 만 있을 경우와 0이 아닌 다른 항이 있을 경우의 해의 형태가 달라진다. 즉, 오른쪽 항이 0만 있을 경우에는 지수 함수의 형태를 가지는 일반 해만 가지며, 오른 쪽 변이 0이 아닐 경우에는 일반 해와 특별 해를 가지게 된다. 비교적 간단한 경우만을 다루기 위해서 위의 예에서는 오른 쪽 항이 상수인 경우만 다루었다. 오른 쪽 항이 상수가 아닌 다른 함수가 있을 경우에 대한 자세한 내용은 미분 방정식에 관한 전문 수학 서적을 참조할 수 있다.