복소수

복소수(complex number)는 실수(real number)와 허수(imaginary number)로 이루어진 수이다. 실수는 제곱을 하면 항상 0보다 큰 수가 되지만, 허수는 제곱을 하면 0보다 작은 수가 된다. 허수를 나타내기 위해서 $j=\sqrt{-1}$를 사용한다. 다음의 예와 같이 허수는 제곱을 하면 0보다 작은 음수가 된다.

$$(j2)^2=\left(2\sqrt{-1}\right)^2=-4 \tag{2.1}$$

허수를 나타낼 때 j 대신에 $i=\sqrt{-1}$를 사용하는 경우도 있으나, 통상 i는 전류를 나타내기 위해서 사용되기 때문에 혼란을 방지하기 위해서 이 책에서는 j를 사용한다. 복소수는 다음의 예와 같이 실수와 허수가 더해진 수이다.

$$1+j2=1+2\sqrt{-1} \tag{2.2}$$

어떤 변수 s가 복소수 값을 가지는 변수라고 할 때, 이를 일반적인 형태로 나타내면 다음 식과 같이 쓸 수 있다.

$$s=a+jb=a+b\sqrt{-1} \tag{2.3}$$

위의 식에서 a와 b는 실수 이며, a를 실수 부(real part), b를 허수 부(imaginary part)라고 부르며 각각의 표기 방법은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a&=\operatorname{Re}\{s\} \\ b&=\operatorname{Im}\{s\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

복소수는 그림으로 나타내는 것이 편리할 경우가 있으며, 복소수를 그림으로 나타내기 위해서 그림 2-1과 같이 직교 좌표(rectangular coordinate) 또는 극 좌표(polar coordinate)를 사용한다. 이와 같이 복소수를 그리는 평면을 복소 평면(complex plane)이라고 한다.

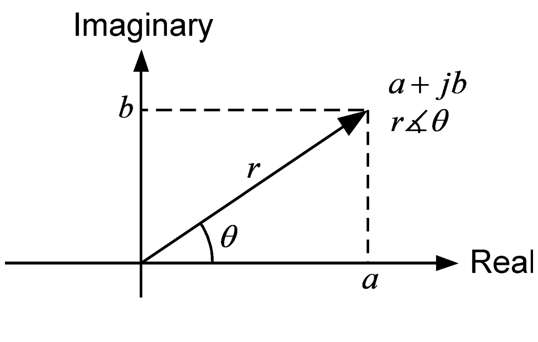

그림 2-1 복소수

직교 좌표는 복소수의 실수 부와 허수 부를 이용하여 나타내며, 극 좌표에서는 원점에서 복소수까지의 거리와 실수 축과 이루는 각도를 이용해서 나타낸다. 원점부터 복소수까지의 거리가 r, 원점으로부터 복소수까지의 직선이 실수 축과 이루는 각도가 θ 인 경우, 복소수는 $a+jb=r\measuredangle\theta$ 와 같이 쓸 수 있다. 직교 좌표와 극 좌표 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} & r\measuredangle\theta=(r\cos\theta)+j(r\sin\theta)=a+jb \\ & a=r\cos\theta, b=r\sin\theta \end{aligned} \tag{2.5}$$

위의 관계식을 이용하면 극 좌표형을 직교 좌표형으로 바꿀 수 있다. 다음 식과 같은 오일러(Euler)의 관계식은 복소수의 연산에 많이 사용된다.

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta \tag{2.6}$$

오일러의 관계식을 사용하면 극 좌표 형의 복소수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r\measuredangle\theta=r(\cos\theta+j\sin\theta)=re^{i\theta} \tag{2.7}$$

복소수의 직교 좌표 형과 극 좌표 형의 예로서 복소수 $\sqrt{3}+j$ 를 그림으로 나타내면 그림 2-2와 같다.

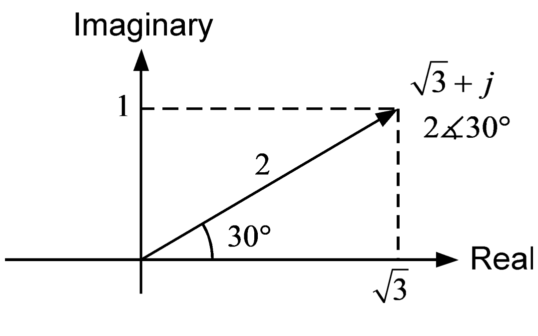

그림 2-2 복소수 $\sqrt{3}+j$

그림 2-2에서 원점으로부터 $\sqrt{3}+j$ 까지 거리는 2 이며, 원점으로부터 $\sqrt{3}+j$ 까지 직선이 실수 축과 이루는 각도는 30도 이므로 이 복소수를 극 좌표로 나타내면 $2\measuredangle 30°$ 이다. 아래의 관계식은 이 복소수의 극 좌표와 직교 좌표 사이의 관계이다.

$$\begin{aligned} 2\measuredangle 30° &= (2\cos 30°)+j(2\sin 30°) \\ &= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+j2\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}+j \end{aligned} \tag{2.8}$$

예제 2-1

아래는 극 좌표 형으로 주어진 복소수를 직교 좌표 형으로 바꾸는 예이다.

$$2\measuredangle 45° = 2\cos(45°) + j2\sin(45°) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} + j2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + j\sqrt{2} \tag{2.9}$$

$$2\measuredangle 135° = 2\cos(135°) + j2\sin(135°) = -2\frac{\sqrt{2}}{2} + j2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} + j\sqrt{2} \tag{2.10}$$

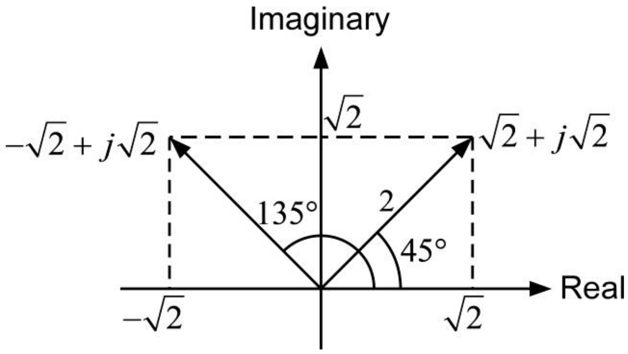

그림 2-3 예제 2-1의 복소수

극 좌표형의 각도는 라디안으로 표기하는 경우도 있다. 아래는 극 좌표형의 각도가 라디안으로 주어진 복소수를 직교 좌표 형으로 바꾸는 예이다.

$$1\measuredangle\left(\pi/4\right) = \cos\left(\pi/4\right) + j\sin\left(\pi/4\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2.11}$$

$$1\measuredangle\left(-\pi/2\right) = \cos\left(-\pi/2\right) + j\sin\left(-\pi/2\right) = -j \tag{2.12}$$

[MATLAB] 복소수의 기호는 영문 소문자 i 혹은 j 를 사용한다. 이 예제의 복소수 $\sqrt{2} + j\sqrt{2}$ 는 아래와 같이 입력할 수 있다. 주의할 점은 i 혹은 j 다음에 곱셈 부호 * 가 필요하다.

```
>> sqrt(2)+i*sqrt(2)
```

극 좌표형은 Euler 공식을 이용한 표기를 사용하며 각도는 항상 라디안을 사용한다. 복소수 $2\measuredangle 45°$ 는 아래와 같이 입력한다.

```
>> 2*exp(i*pi/4)
```

직교 좌표 형으로 주어진 복소수 $a + jb$ 를 극 좌표형 $r\measuredangle\theta$ 으로 바꾸려면 다음의 관계식을 이용할 수 있다.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{2.13}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{2.14}$$

위의 관계식을 이용할 때 주의할 점은 a 와 b 의 부호에 따라서 복소수가 위치하는 사분면(quadrant)이 달라질 수 있다. 예를 들면 a 와 b 가 모두 0보다 크면 제 1 사분면의 각도이지만, 모두 0 보다 작은 경우에는 제 3 사분면의 각도이다.

예제 2-2

아래는 직교 좌표 형으로 주어진 복소수를 극 좌표 형으로 바꾸는 예이다.

$$\begin{aligned} -\sqrt{3} + j &= \sqrt{3+1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + j\sqrt{3+1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\cos(180° - 30°) + j2\sin(180° - 30°) = 2\measuredangle(150°) \end{aligned} \tag{2.15}$$

위의 예에서는 실수부가 0보다 작고, 허수부가 0보다 크므로 제 2 사분면의 각도이다.

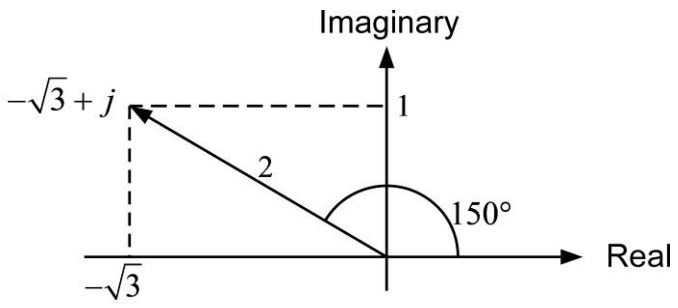

그림 2-4 예제 2-2의 복소수

[MATLAB] atan2(Y,X) 함수를 이용하면 사분면 각도를 구할 수 있다. 이 예제의 각도는 다음과 같은 명령어로 구할 수 있다.

```
>> atan2(1,-sqrt(3))*180/pi
```

■

● 복소수의 덧셈과 뺄셈

다음과 같이 두개의 복소수를 정의하여 복소수의 덧셈을 알아 본다.

$$s_1 = a_1 + jb_1, \quad s_2 = a_2 + jb_2 \tag{2.16}$$

복소수의 덧셈은 실수 부와 허수 부를 각각 더하여 다음 식과 같이 결과를 얻을 수 있다.

$$s_1 + s_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 + = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \tag{2.17}$$

이 덧셈을 복소 평면에서 그림으로 나타내면 그림 2-3과 같다.

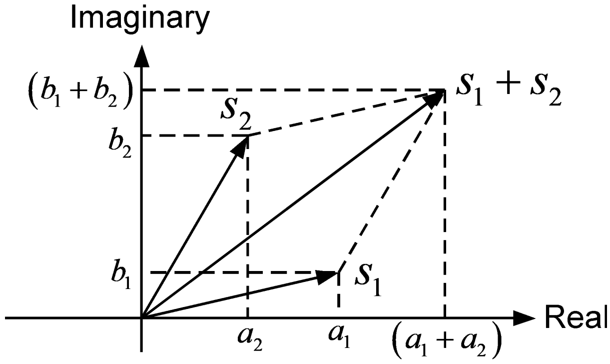

그림 2-5 복소수의 덧셈

위의 그림과 같이 복소수 평면에서의 덧셈은 벡터의 연산과 같다. 즉 두 복소수의 합을 표시 하는 벡터는 각 복소수를 표시하는 벡터를 벡터 평면에서 더한 결과와 같다.

복소수의 뺄셈도 덧셈과 유사하게 다음 식과 같이 결과를 얻을 수 있다.

$$s_1 - s_2 = a_1 + jb_1 - a_2 - jb_2 + = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2) \tag{2.18}$$

위 식의 뺄셈을 복소수 평면에서 나타내면 그림 2-4와 같다.

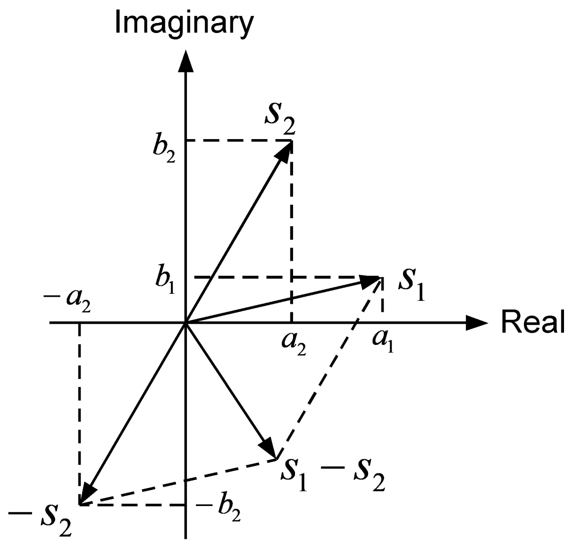

그림 2-6 복소수 평면에서 뺄셈

복소수 평면에서 뺄셈은 빼는 복소수의 부호를 반대로 한 복소수를 더하여 그림 2-4와 같이 얻을 수 있다. 그러나 뺄셈의 경우 그림 2-5와 같이 그리면 간편하게 그릴 수 있다.

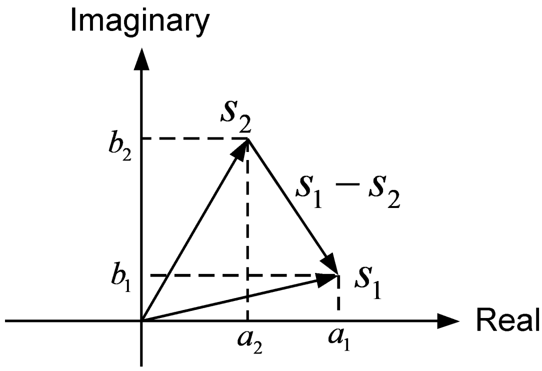

그림 2-7 복소 평면에서 뺄셈

즉, 다음 식을 보면 s_2 벡터와 $s_1 - s_2$ 벡터를 더한 결과는 s_1 벡터와 같으며, 이와 같은 결과를 그림 2-5에서 확인할 수 있다.

$$s_2 + \left(s_1 - s_2\right) = s_1 \tag{2.19}$$

예제 2-3

다음은 복소수 뺄셈의 예이다.

$$\begin{aligned} &S_1 = 2 + j, S_2 = 1 + j2 \\ &S_1 - S_2 = (2-1) + j(1-2) = 1 - j \end{aligned} \tag{2.20}$$

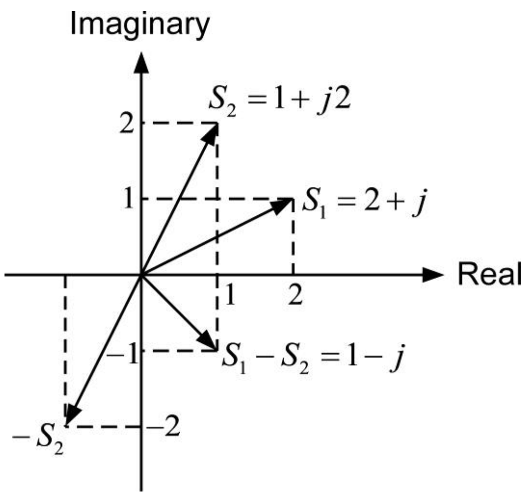

그림 2-8 예제 2-3의 뺄셈

■

● **복소수의 곱셈과 나눗셈**

복소수의 곱셈은 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1 a_2 + ja_1 b_2 + ja_2 b_1 + j^2 b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned} \tag{2.21}$$

위의 식에서 $j^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ 의 관계가 사용되었다. 복소수의 곱셈은 극 좌표를 이용하면 훨씬 간단하게 결과를 구할 수 있다. 먼저, 두 복소수의 극 좌표를 다음 식과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} s_1 &= r_1 \measuredangle \theta_1 = (r_1 \cos\theta_1) + j(r_1 \sin\theta_1) = r_1 e^{j\theta_1} \\ s_2 &= r_2 \measuredangle \theta_2 = (r_2 \cos\theta_2) + j(r_2 \sin\theta_2) = r_2 e^{j\theta_2} \end{aligned} \tag{2.22}$$

위의 식에서 오일러(Euler)의 관계식이 사용되었음에 유의하며, 이 관계식을 이용하면 복소수의 곱셈은 다음 식과 같이 얻을 수 있다.

$$s_1 s_2 = \left(r_1 e^{j\theta_1}\right)\left(r_2 e^{j\theta_2}\right) = r_1 r_2 e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 \measuredangle (\theta_1 + \theta_2) \tag{2.23}$$

즉, 복소수를 극 좌표 형으로 표현했을 때, 곱셈 결과 복소수의 크기는 각 복소수의 크기를 곱함 것과 같다. 또한 곱셈 결과 복소수의 각도는 각 복소수 각도를 더한 것과 같다.

복소수의 나눗셈은 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{s_2} &= \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 - ja_1 b_2 - ja_2 b_1 - j^2 b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - j(a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned} \tag{2.24}$$

위의 식에서 분모를 실수로 변환하기 위하여 분모와 분자에 $a_2 + jb_2$ 의 켤레 복소수인 $a_2 - jb_2$ 를 곱했음에 유의한다. 곱셈과 마찬가지로 복소수를 극 좌표 형으로 표현하면 다음 식과 같이 나눗셈 결과를 간단하게 구할 수 있다.

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\frac{e^{j\theta_1}}{e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \measuredangle (\theta_1 - \theta_2) \tag{2.25}$$

위의 식에서 볼 수 있듯이 복소수로 나누는 것은 복소수의 크기로는 나누어 주고, 복소수의 각도로는 빼주는 것과 같다.

예제 2-4

아래의 복소수에 대한 곱셈과 나눗셈의 예이다.

$$S_1 = 1\measuredangle 60° = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, S_2 = 2\measuredangle 30° = \sqrt{3} + j \tag{2.26}$$

아래는 이 복소수의 직교 좌표형과 극 좌표형을 이용한 곱셈이다.

$$S_1 \cdot S_2 = \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3} + j\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + j\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = j2 \tag{2.27}$$

$$S_1 \cdot S_2 = 2\measuredangle\left(60° + 30°\right) = 2\measuredangle 90° = j2 \tag{2.28}$$

아래는 직교 좌표형과 극 좌표형을 이용한 나눗셈이다.

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3} + j} = \frac{\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3} - j\right)}{\left(\sqrt{3} + j\right)\left(\sqrt{3} - j\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + j\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1\measuredangle 60°}{2\measuredangle 30°} = \frac{1}{2}\measuredangle\left(60° - 30°\right) = \frac{1}{2}\measuredangle 30° = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) \tag{2.30}$$

위의 예에서 볼 수 있듯이 곱셈과 나눗셈은 극 좌표형을 이용하는 것이 직교 좌표형을 이용하는 것 보다 간편하다.

[MATLAB] 이 예제의 곱셈과 나눗셈은 아래의 명령어로 계산할 수 있다.

```
>> S1=1/2+i*sqrt(3)/2;S2=sqrt(3)+i;
>> S1*S2
>> S1/S2
```

■